Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Ano 2021

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Luiza Alves Batista
Correção: Kimberlly Elisandra Gonçalves Carneiro
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 3 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-855-7
DOI 10.22533/at.ed.557211003

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

DIFICULDADES EVIDENCIADAS NA PRÁTICA PEDAGÓGICA DE PROFESSORES INICIANTES EM MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/03/2021

Emerson Batista Ferreira Mota
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas (SP)
https://orcid.org/0000-0001-6705-6322

José Cirqueira Martins Júnior
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas (SP)
https://orcid.org/0000-0002-0103-2800

Dario Fiorentini
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Campinas (SP)
http://orcid.org/0000-0001-5536-0781

RESUMO: Este artigo investigou as dificuldades que egressos do curso de licenciatura em Matemática enfrentaram em sua prática pedagógica da sala de aula. O objetivo foi identificar e analisar as dificuldades enfrentadas pelos professores iniciantes egressos do curso de Matemática em suas práticas pedagógicas no ensino fundamental e médio. Na metodologia usamos um estudo qualitativo com pesquisa descritiva e os instrumentos utilizados para coletar os dados foram questionários e entrevistas com professores de matemática da rede pública. Assim, o questionário selecionou 11 professores com a intenção de aproximação, dos quais, apenas 03 foram submetidos a uma entrevista, visando obter um maior aprofundamento das realidades e percepções dos professores sobre as dificuldades encontradas no início da carreira docente. O estudo realizado aponta que a formação inicial não é responsabilidade exclusiva da Universidade ou da escola. Implica compromisso, engajamento e participação conjunta e articulada da família, da escola, da Universidade e das políticas públicas, mediante desenvolvimento de projetos que ajudem os professores a superarem as dificuldades que emergem da prática de sala de aula. Isso certamente irá permitir uma melhor ressignificação do ensino e criação de novas ações de trabalho por meio de tarefas exploratórias que favoreçam uma aprendizagem matemática relevante culturalmente aos jovens e crianças que frequentam a escola atual.
PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades, Desinteresse dos Alunos, Matemática, Professor Iniciante.

ABSTRACT: This article investigated the difficulties that graduates of the degree course in Mathematics faced in their pedagogical practice in the classroom. The objective was to identify and analyze the difficulties faced by beginning teachers who graduated from the Mathematics course in their pedagogical practices in elementary and high school. In the methodology we used a qualitative study with descriptive research and the instruments used to collect the data were questionnaires and interviews with mathematics teachers of the public network. Thus, the questionnaire selected 11 teachers with the intention of approximation, of whom only 03 were submitted to an interview, aiming to obtain a deeper understanding of the realities and perceptions of teachers about the

difficulties encountered at the beginning of the teaching career. The study shows that initial training is not the sole responsibility of the University or the school. It implies commitment, engagement and joint and articulated participation of the family, school, university and public policies, through the development of projects that help teachers overcome the difficulties that emerge from classroom practice. This will certainly allow for a better resignification of teaching and the creation of new work actions through exploratory tasks that favor culturally relevant mathematical learning to young people and children attending the current school.
KEYWORDS: Difficulties, Students' disinterest, Mathematics, Beginner Teacher.

1 I INTRODUÇÃO

Este estudo teve como ponto de partida a trajetória acadêmica e profissional dos autores, por trabalharem na graduação em Matemática e estarem envolvidos com a formação de professores para o ensino fundamental e médio, quando discutiam teorias e analisavam produções científicas referentes ao tema de ensino, dificuldades e práticas pedagógicas para ajudar na compreensão de alguns problemas que podem emergir no decorrer das aulas de matemática. Refletir sobre a prática pedagógica do professor iniciante de matemática coloca uma possibilidade de ampliar as análises sobre a docência e apontar perspectivas que a Universidade deve pensar a respeito da formação de professores para essa disciplina.

O presente artigo discute algumas dificuldades enfrentadas, no início da profissão docente, por egressos da licenciatura plena em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES). No início da carreira, muitos professores de matemática enfrentam dificuldades. A esse respeito, Veenman (1984) define a dificuldade do professor iniciante como um problema que ele encontra no desempenho de sua tarefa de ensino em que os seus objetivos, suas intenções podem ser impedidas de se realizarem ao se deparar com a realidade ou ao enfrentar uma sala de aula. Nesse sentido, Lourencetti (1999, p. 36) nos lembra que "as contradições, os conflitos, as dificuldades e os problemas podem fazer parte dos dilemas profissionais".

O professor iniciante sempre que se depara com uma nova realidade estará sujeito às influências do meio onde ele se encontra. Percebemos que os professores egressos desta Universidade apontaram em sua prática a necessidade de implementação de um programa de apoio aos professores iniciantes de modo a atendê-los em suas dificuldades durante as aulas, pois o estágio supervisionado, por melhor que seja, não fornece respostas suficientes para superá-las apenas com a formação inicial. Nesse contexto, o desenvolvimento profissional docente, desde a sua formação inicial até o início da carreira, pode ser caracterizado, de maneira geral, por períodos de adaptações, desafios, descobertas, frustrações e decepções (VASCONCELLOS, 2009).

O contato com os novos colegas de profissão, as diversidades existentes entre os alunos, a adaptação ao ambiente escolar, o papel de ser professor em uma sala de aula,

são algumas das situações enfrentadas pelos docentes iniciantes. A esse respeito, Ponte *et al.* (2001) apontam que:

> Os primeiros anos da profissão docente são cruciais para o desenvolvimento do conhecimento e identidade do professor. Trata-se de um período em que o jovem professor se encontra entregue a si próprio, tendo que construir formas de lidar com toda uma variedade de papéis profissionais, em condições variadas e, muitas vezes, bastante adversas. O confronto diário com situações complexas que exigem uma resposta imediata faz deste período uma fase de novas aprendizagens e de reequacionamento das suas concepções sobre a escola, a educação, o currículo, a disciplina que ensina os alunos e o próprio trabalho em si. (PONTE *et al.*, 2001, p. 31).

Nesse sentido, é perceptível que as dificuldades enfrentadas pelo professor iniciante de matemática podem ser interpretadas como dilemas, problemas e obstáculos que fazem parte do pensar e agir didático em sala de aula para o enfrentamento do processo de ensino e aprendizagem com os seus alunos. O que acontece com os professores em início de carreira e suas dificuldades enfrentadas na prática pedagógica são determinantes para a continuidade de sua prática profissional, pois, refletir sobre o que ocorre na prática pedagógica do professor iniciante de matemática, permite a ampliação de investigações a respeito da docência, apontando perspectivas para as escolas e Universidades sobre o papel da formação profissional.

A partir desse contexto, buscamos encontrar resposta para o problema "Quais as dificuldades que egressos do curso de licenciatura em Matemática enfrentaram em sua prática pedagógica da sala de aula?" e, com isso, o objetivo foi identificar e analisar as dificuldades enfrentadas pelos professores iniciantes egressos do curso de Matemática em suas práticas pedagógicas no ensino fundamental e médio.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A carreira inicial do professor de matemática é marcada pela realidade na qual está inserido, com seus indícios históricos, políticos, sociais e econômicos. É marcada, de um lado, por constantes desafios, principalmente em relação a sua atuação em uma sociedade em constantes mudanças e, de outro lado, pela globalização em que prevalecem as desigualdades sociais como a exclusão social, má distribuição de renda, fome e miséria.

O professor de matemática talvez seja aquele que mais sofre críticas durante o começo de seu trabalho, pois Fiorentini (2003) destaca a existência de alguns caminhos que podem ter orientado muitas de suas ações em que:

> Os formadores de professores de matemática têm sido acusados, com frequência, de não atualizarem os cursos de licenciatura e de não viabilizarem uma efetiva formação contínua que rompa com a tradição pedagógica. Os professores de matemática da escola, por sua vez, são vistos como seguidores dessa tradição e, portanto, resistentes às inovações curriculares e à integração com outras disciplinas. (FIORENTINI, 2003, p. 10).

Hoje existe a necessidade de o professor ser um profissional reflexivo, que investigue a sua própria prática, que seja também um produtor de saberes e o principal responsável pelo seu desenvolvimento profissional, pois, no processo de formação de professores e na formação continuada, a reflexão sobre os saberes é necessária para a ampliação da prática docente e de seus conhecimentos na formação inicial. Ao refletir sobre essa formação é necessário considerar que os programas de formação de professores apresentam diferentes concepções do professor que pretendem formar.

Ao pensar na concepção de professor, de mundo, de ensino e profissão deve-se dar mais suporte a essa formação inicial, pois é importante reconhecer que as informações obtidas sobre a vida dos docentes antes e durante suas atuações profissionais, poderão ajudar a esclarecer melhor este período em que os professores adquirem conhecimentos, habilidades e atitudes que são levadas ou não a sério na direção de um ensino de qualidade.

Neste sentido, Nóvoa (1995) relata que:

> A formação pode estimular o desenvolvimento profissional dos professores, no quadro de uma autonomia contextualizada da profissão docente. Importa valorizar paradigmas de formação que promovam a preparação de professores reflexivos, que assumam a responsabilidade do seu próprio desenvolvimento profissional e que participem como protagonistas na implementação de políticas educativas. (NÓVOA, 1995, p. 27).

Observamos que os professores precisam adquirir conhecimentos com o surgimento dos problemas inerentes à sua prática, para que tenham condições de lidar com estes e encontrar possíveis soluções. Nesse sentido, a formação inicial tem que assumir o princípio de que, por mais que ela promova uma educação sólida, essa formação nunca é suficiente para promover todos os conhecimentos necessários à sua atuação profissional plena. Mas a formação inicial pode ajudar o futuro professor a ser um aprendiz permanente na prática e da prática, mediante pesquisa da própria prática. Isso acontece porque a prática profissional sempre é mais complexa do que os conhecimentos que a academia tem dela. Diante deste quadro, fazemos o seguinte questionamento: é possível o futuro professor ter acesso, já na formação inicial, à aprendizagem de conhecimentos na e da prática, como destacam Cochran-Smith e Lytle (1999)?

Desse modo, aprender a ensinar "é um processo que continua ao longo da carreira docente e que, não obstante a qualidade do que fizermos nos nossos programas de formação de professores, na melhor das hipóteses só poderemos preparar os professores para começarem a ensinar" (ZEICHNER, 1993, p. 55).

É na vivência da prática de ensinar e aprender matemática, seja como estudantes ou como professores, que aprendemos a ser professores de matemática. Nesse sentido, apoiados em Fiorentini (2003), podemos dizer que o desenvolvimento profissional de um professor ocorre bem antes do seu ingresso na licenciatura e, embora tenha uma formação profissional intencional durante a licenciatura, ele continua a desenvolver-se durante toda

sua trajetória profissional como docente. Ou seja, a aprendizagem docente não é medida pelo produto do que aprende, mas pelo modo como promove seu ensino e se transforma nesse processo, sendo este um movimento contínuo de dentro para fora, mediado por uma relação dialética entre teoria e prática. É preciso compreender que os professores mudam continuamente por meio de suas carreiras, embora esse processo possa, visto de fora (e usualmente também pelos próprios professores), parecer um crescimento uniformemente contínuo. Esse processo depende do tempo, das experiências vividas, das oportunidades e do apoio de outros, da forma pessoal de reagir e lidar com os obstáculos.

Ao analisar algumas dificuldades que os professores iniciantes apresentaram quando Veenman (1984) construiu uma tabela que apresentou um ranking com 24 dificuldades mapeadas, conforme Quadro 1, optamos por tomá-lo como referência para orientar algumas discussões em nosso trabalho.

Rank	Dificuldades	Rank	Dificuldades
1	Disciplina em sala	13	Políticas escolares e suas regras
2	Motivação dos alunos	14	Avaliar a aprendizagem dos alunos
3	Lidar com diferenças individuais	15	Domínio do conteúdo da disciplina
4	Avaliação dos trabalhos dos alunos	16	Trabalho administrativo
5	Relação com os pais	17	Relação com os colegas
6	Organização dos trabalhos na classe	18	Recursos escolares inadequados
7	Materiais insuficientes	19	Lidar com alunos em dificuldades
8	Lidar com dificuldades individuais dos alunos	20	Lidar com alunos de culturas diversas
9	Excesso de aulas e pouco tempo de prepará-las	21	O uso de livros e guias curriculares
10	Relação com os colegas	22	Falta de tempo livre
11	Planejamento das aulas	23	Orientações inadequadas
12	Uso de metodologias diferenciadas	24	Excesso de alunos em sala de aula

Quadro 1. Dificuldades apresentadas por Veenman (1984).

Fonte: VEENMAN (1984, p. 154-155).

Para elaborar este quadro, fizemos algumas adaptações do estudo original de Veenman (1984). Ao fazer uso das duas primeiras colunas para realizar um estudo comparativo dos dados apontados nesse artigo. Informamos que os valores enumerados do ranking na tabela revelam o grau de prioridade das dificuldades elencadas dos professores no início da carreira docente, assim, o ranking 1 representa a maior dificuldade encontrada dos professores e o ranking 24 a menor dificuldade, conforme o quadro 1.

Notamos que Veenman (1984) analisou a transição da formação inicial e atuação profissional, utilizando a expressão "choque de realidade" em que o conceito de choque indica uma ruptura que se dá entre os ideais construídos ao longo da formação inicial e a dura realidade numa sala de aula, e este não está inscrito num período limitado de tempo, mas se refere a um processo longo e complexo. Nessa direção, Rocha e Fiorentini (2009, p. 127) apontam que, embora a expressão reality shock tenha sido traduzida por outros autores como "choque com a realidade" ou "choque da realidade", preferimos utilizar como "choque de realidade", pois esta expressa um estado mais orgânico de perplexidade ou "de colapso entre os ideais construídos durante a formação inicial e a dura e complexa realidade de vida da sala de aula" (VEENMAN, 1984, p. 143). Ao fazer isso, o autor atribui um caráter universal a estes problemas, afirmando que os mesmos ultrapassam as características pessoais e o conhecimento dessas dificuldades possibilita obter informações para a melhoria dos programas de formação.

Nesse sentido, podemos dizer, com base em Cochran-Smith e Lytle (1999), que os conhecimentos para a prática não são suficientes para atender às necessidades dos professores em face da complexidade da prática de ensinar e aprender nas escolas, em seus múltiplos contextos e realidades. Assim, situar a complexidade do desenvolvimento profissional no início da carreira perpassa pelos espaços escolares, bem como seus pares e estabelece os desafios que vão ao encontro das práticas pedagógicas dos professores de matemática e a necessidade de superá-las.

3 | ASPECTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa em Educação Matemática tem sido utilizada para tentar compreender o que ocorre nos ambientes que envolvem os professores, alunos e a sala de aula. Ela tem sinalizado caminhos alternativos e seguros para enfrentar ou tratar os problemas que ocorrem nesses ambientes (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Quando o objeto de estudo de uma pesquisa requer a coleta de informações obtidas diretamente na realidade onde ocorre o desenvolvimento de uma prática e busca-se a opinião ou percepção dos sujeitos acerca de um problema específico, a abordagem investigativa que melhor se encaixa para realizar a investigação é a da pesquisa qualitativa de caráter descritivo, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012):

> Uma pesquisa é considerada *descritiva* quando o pesquisador deseja descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema. Geralmente esse tipo de investigação utiliza a observação sistemática (não etnográfica) ou a aplicação de questionários padronizados, a partir de categorias previamente definidas. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 70, grifo dos autores).

Assim, entende-se que o propósito desta pesquisa está atrelado a uma preocupação com o significado, buscando captar a maneira própria ou singular como cada sujeito se vê e

vê o mundo em que vive, como é o caso da iniciação à docência e das dificuldades vividas por cada professor nesse processo.

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram os questionários, tendo sido consultados 11 professores iniciantes e egressos do curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES) para obter informações gerais acerca de seus aspectos profissionais e, dentre esses, selecionamos 03 professores para serem entrevistados com o intuito de ter um maior aprofundamento das realidades e percepções das dificuldades enfrentadas por eles no início da carreira docente.

Tendo em vista as características do estudo proposto, a aplicação de questionários seria um caminho coerente, uma vez que permitiria configurar a percepção de um coletivo mais amplo de professores acerca de suas experiências sobre o problema em questão. A técnica de utilização de questionários foi importante por assegurar maior confiança nas respostas dos sujeitos (FIORENTINI; LORENZATO, 2012; TRIVIÑOS, 1987). Os questionários foram aplicados, visando buscar uma primeira aproximação ao objeto de pesquisa. Uma aproximação que permitisse trazer as contribuições de um universo mais amplo dos sujeitos, dentre os quais seriam selecionados alguns sujeitos para a realização de entrevistas.

4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

O universo da pesquisa é constituído de egressos da UNIMONTES do curso de licenciatura plena em Matemática. Para fazer parte da amostra inicial considerou-se todos os alunos que concluíram ou colaram grau no curso de Matemática noturno, no ano de 2013, para os quais foram encaminhados uma carta de apresentação e um questionário por e-mail que deveria ser respondido e devolvido por e-mail, ou imprimir e entregar pessoalmente aos pesquisadores, o qual deveria conter os motivos das dificuldades do início da carreira como professor de matemática.

Foram enviados questionários para um conjunto inicial de 44 sujeitos egressos do curso de Matemática com dados que foram fornecidos pela Secretaria Geral da Universidade. O número de formandos anualmente era entre 15 a 25 alunos, considerando que o curso é semestral com 2 entradas anuais. Uma dessas entradas é pelo Processo Seletivo de Acesso à Educação Superior (PAES) e a outra pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Foram respondidos e devolvidos apenas 11 questionários, os quais passaram a ser o nosso universo de sujeitos de pesquisa. Dentre esses, foram selecionados três para entrevista e, para a seleção destes três, consideramos aqueles que tiveram experiência docente após a conclusão da graduação, ou seja, professores iniciantes, sem experiência prévia como professores de matemática. Nesse sentido, os professores que fizeram o

estágio supervisionado com a regência de classe, esta não foi considerada experiência como docência no início da profissão.

Dos 11 sujeitos egressos que responderam ao questionário, seis (6) são mulheres com idade entre 24 a 31 anos e cinco (5) são homens com idade entre 27 a 32 anos. No que se refere à escolaridade do ensino médio, apenas um (1) fez curso técnico profissionalizante e os outros 10 concluíram o ensino médio não profissionalizante. Além disso, 3 egressos realizaram Pós-Graduação "Lato Sensu". Nenhum deles estava, quando responderam ao questionário, matriculado em programas de Mestrado ou Doutorado. Outras informações a respeito desses egressos, estão disponíveis no Quadro 2, a seguir.

Após a análise dos questionários, o próximo passo foi selecionar os sujeitos para a entrevista. Segundo Huberman (1995) o professor iniciante é aquele que tem de um (1) a cinco (5) anos de prática pedagógica, aspecto que foi atendido por 100% dos sujeitos de nossa pesquisa, conforme Quadro 2.

Nome	Sexo	Idade	Nível Médio	Nível Superior	Tempo na docência
Ana	Feminino	31	Ensino Médio	Pós-graduação	2,5 anos
Ester	Feminino	30	Ensino Médio	Graduação	4 anos
Pedro	Masculino	32	Ensino Médio	Graduação	2 anos
João	Masculino	28	Técnico	Graduação	4,5 anos
Lucas	Masculino	28	Ensino Médio	Graduação	3,5 anos
Lia	Feminino	32	Ensino Médio	Pós-graduação	2,5 anos
Noemi	Feminino	27	Ensino Médio	Graduação	4 anos
Paulo	Masculino	27	Ensino Médio	Pós-graduação	3,5 anos
Rute	Feminino	24	Ensino Médio	Graduação	1,5 anos
Marcos	Masculino	28	Ensino Médio	Graduação	4 anos
Mirian	Feminino	27	Ensino Médio	Graduação	2 anos

Quadro 2. Identificação e características dos sujeitos da pesquisa.

Fonte: Os dados da pesquisa.

Após a tabulação dos questionários e a transcrição das entrevistas sobre as dificuldades enfrentadas na prática pedagógica em sala de aula, procuramos fazer uma análise das respostas apresentadas e das entrevistas. Para essa análise, tomamos como referência o *ranking* sistematizado por Veenman (1984). No *ranking* obtido pelo estudo de Veenman, a indisciplina aparece em primeiro lugar, em todos os níveis escolares, tanto no elementar como no secundário. Em segundo lugar, aparece a motivação dos alunos e, em seguida, o trato com as diferenças individuais. Na sequência, a avaliação dos alunos e, em quinto, a relação com seus pais.

Em relação ao nosso estudo, também procuramos elencar em ordem decrescente as dificuldades mencionadas, isto é, do maior grau de dificuldade para o menor grau, o que permitiu visualizar a frequência das principais dificuldades vivenciadas, colocando-as numa sequência que se baseia no número de repetições que tal dificuldade foi mencionada nas palavras e frases respondidas no questionário pelos professores.

Cabe, entretanto, destacar que os nossos sujeitos de pesquisa tiveram a liberdade de apontar as suas maiores dificuldades, colocando-as em ordem decrescente (precisamente 5 palavras ou pequenas frases relacionadas a elas), colocando prioritariamente em ordem da maior dificuldade para a menor. Esperávamos que essa seria a melhor forma de retratar as dificuldades enfrentadas pelos egressos durante o período de iniciação da sua profissão docente. Assim, foram coletadas um total de 55 palavras ou frases.

Como mostra o Quadro 3, a principal dificuldade apontada, envolvendo quase todos os egressos (9 professores). Em segundo lugar, foi destacada, com sete indicações, a indisciplina dos alunos e, a seguir, a falta de recursos didáticos (6 professores iniciantes) e, assim por diante.

Nesse artigo, iremos analisar apenas a maior dificuldade encontrada que foi o desinteresse dos alunos e, em outros trabalhos, traremos as demais análises. A opção dos professores em sinalizar o desinteresse dos alunos como sendo a sua principal dificuldade reflete o tipo de alunos que se têm hoje nas escolas, possibilitar o incentivo de uma aprendizagem que favoreça a compreensão dos conteúdos de matemática está cada vez mais difícil de acontecer. A esse respeito, Veenman (1984) aponta em segundo lugar, em seu ranking, a motivação dos alunos, sendo este um dos dilemas que podem ser vividos pelos professores iniciantes e que necessitam superar. A realidade daquela época não foi muito diferente da nossa pesquisa, pois mesmo naquele período, ter que motivar os alunos, parece algo que já preocupava os aspectos de formação dos professores em começo de carreira e, de lá para cá, não vemos uma mudança significativa desse reflexo na formação dos professores, quando olhamos para os egressos investigados neste artigo.

Ranking	Principais Dificuldades	Frequências
1	Desinteresse dos alunos	9
2	Indisciplina dos alunos	7
3	Falta de recursos didáticos	6
4	Desvalorização	5
5	Metodologia	4
6	Relacionamento com colegas da profissão	4
7	Falta de oportunidade da carreira docente	3
8	Dificuldade de aprendizagem dos alunos	3
9	Distanciamento entre família e escola	3
10	Elaboração do plano de aula	2
11	Inexperiência	2
12	Falta de capacitação	2
13	Sobrecarga de trabalho	2
14	Desrespeito dos alunos	1
15	Salas lotadas	1
16	Motivação pessoal	1

Quadro 3. Principais dificuldades apontadas pelos professores iniciantes da UNIMONTES.

Fonte: Os dados da pesquisa.

O professor atribui significado ao seu trabalho e também ao que os alunos fazem ou deixam de fazer no desenvolvimento de suas aulas. O interesse que os alunos apresentam durante as aulas proporciona uma motivação extra para o bom desenvolvimento de suas ações docentes, favorecendo uma maneira de estabelecer diálogo entre o que foi planejado e o que conseguiu realizar durante as aulas. Quando existe correspondência nesse diálogo, os professores ficam motivados e constroem significados de suas experiências na docência, percebendo que a sua prática continua e se reformula na direção de construir novos caminhos para serem trilhados com os seus alunos.

No que se refere ao **desinteresse dos alunos**, observamos a resposta de dois professores durante a entrevista quando falaram da sua maior dificuldade:

> Mas há lacunas que simplesmente o professor não pode preencher por si só. O apoio da família é indispensável e único, que está ligado a outro ponto chave, querer estudar. Há que se incentivar, incitar ou acordar o interesse adormecido nos alunos, mas, no cenário educacional que está se formando, isso está cada vez mais difícil, com n-possibilidades. (Entrevista da professora Ester).

> Preocupo muito com a aprendizagem dos meus alunos e vejo que a maioria deles, por onde tenho trabalhado, estão desmotivados e indisciplinados. Chego ao meu limite de tolerância. O problema não tem sido ensinar matemática e sim como pensar em uma metodologia ou repensar minha prática a fim de controlar as conversas, a falta de respeito... Enfim, todas essas dificuldades vivenciadas por mim que esta pesquisa tem levantado. (Entrevista do professor Lucas).

Percebemos que o desinteresse e a indisciplina dos alunos são assuntos que vêm preocupando muito as aulas dos professores, principalmente da área de matemática. A culpa geralmente é atribuída ao outro e não ao modo como o professor ensina e explora a matemática em sala de aula. Muitos professores iniciantes tendem a responsabilizar os próprios alunos, a direção ou a família do aluno pelos problemas de disciplina, como destaca Pires (1999, p. 183): “o professor espera que a classe faça silêncio para poder dar aula; o aluno quer logo ir embora e receber a nota; a direção não quer problemas e os pais querem que o filho seja aprovado objetivando a ascensão social”.

Não há dúvidas que essas dificuldades que os alunos apresentam têm marcado momentos de constrangimento e improvisação no trabalho desses professores de matemática. A falta de controle geralmente atrapalha o desenvolvimento das aulas e coloca uma situação de frustração. Sendo que isso ocorre, talvez, por ser um reflexo da família ou do que a própria sociedade tem colocado como ascensão para a liberdade, no sentido de fazer o que quiser e na hora que bem entender na sala, onde os alunos, muitas vezes, se esquecem ou não estão atentos, que existem conhecimentos importantes para serem construídos com os seus professores no ambiente escolar. Não há dúvidas que a família tem responsabilidades na educação de seus filhos. Quando olhamos para as respostas de Ester, ela não atribui responsabilidade na forma como pode desenvolver o seu trabalho docente, pois muitas das atividades que acontecem na sala de aula é realizada pelo planejamento que o professor estabelece.

Em contrapartida, Lucas traz a responsabilidade para si, ao perceber que cabe a ele buscar caminhos ou alternativas. Ao afirmar que o problema não tem sido ensinar matemática e sim como pensar em uma metodologia ou repensar minha prática...”, trabalhando o ensino de matemática de maneira mais relevante à cultura das crianças e jovens, de modo a conquistar o interesse e o gosto dos alunos pela atividade matemática. Prática docente essa que implica uma relação mais exploratória ou dialógica da relação dos alunos com a atividade escolar da matemática. A ruptura com uma prática tradicional de ensinar e aprender matemática na escola tem muito a ver com a formação inicial do

professor. E o estudo das dificuldades dos egressos pode ajudar a repensar o modo como a universidade organiza e desenvolve os cursos de licenciatura em matemática e principalmente o modo como são desenvolvidos os cursos de formação continuada. Os aspectos relativos à incerteza e experiências de frustração, nos primeiros anos da docência, também foram apontados por Ponte *et al.* (2001) que consideram ser necessário encarar os problemas da realidade e tentar encontrar respostas ou saídas, mesmo que imediatas, para as dificuldades que vão surgindo. As dificuldades ocasionam momentos de crescimento e amadurecimento das aprendizagens dos professores, pois lidar com situações inesperadas e conflitantes acabam impulsionando a tomada de decisões que, muitas vezes, os obrigam a tentar associar há alguma experiência do estágio ou procurar ajuda para algum dos colegas que também passaram por dificuldades semelhantes.

Encontramos algumas **indicações parciais de solução** que foram apresentadas pelos professores para tentar superar essa dificuldade, conforme pode ser evidenciado nos diálogos abaixo:

> A Universidade deveria ter mais participação e acompanhar os professores que formaram, ela também tem esse papel. Tenho procurado trabalhar com mais projetos na escola onde atuo, mostrando aos demais colegas a necessidade e os benefícios no ensino-aprendizagem que podemos ter com esses projetos, além de contribuir para a motivação dos nossos alunos que por vezes sentem-se desmotivados e apáticos às atividades escolares. (Entrevista do professor Marcos).

> Uma das dificuldades que enfrentei foram as críticas destrutivas dos colegas da profissão e da direção quando queriam que eu usasse novas metodologias para ensinar o aluno. Como posso ensinar diferente ou melhor se o que eu aprendi na Universidade não está fazendo diferença aqui? Estou sentindo falta de meus professores para me ajudar a resolver coisas assim! (Entrevista do professor Lucas).

As aulas de matemática, quando desenvolvidas por meio de projetos, oferecem um caminho alternativo para a aprendizagem dos alunos. Problematizar e investigar as situações do contexto das aulas de matemática é um caminho possível e que vem se configurando como elemento motivador para a construção de experiências significativas dos alunos (FIORENTINI, 2003). Percebemos que a Universidade tem um papel inicial na orientação e formação do trabalho dos professores iniciantes, pois o aporte teórico construído na aprendizagem desses professores nas interações das aulas ainda serve de referência, eles notaram que deveriam ter vivido e estudado melhor a prática de ensinar e aprender matemática na escola, ou ter experimentado uma realidade semelhante para que não houvesse tantas dificuldades. Cabe agora, às Universidades próximas a este contexto pesquisado, se posicionarem e iniciarem um trabalho que melhor articule o acompanhamento desses professores em início de carreira, para desenvolver projetos que os auxiliem na superação de dificuldades que aparecem no início da docência.

Portanto, destacamos a necessidade de a Universidade tomar como objeto de estudo, já na formação inicial, a prática complexa de sala de aula para assumir um papel diferenciado na formação continuada dos seus estudantes. Assim, deixamos uma discussão em aberto "qual é o objeto de estudo da formação continuada desses recém formados para dar conta de suas dificuldades que emergem de suas práticas nas aulas de matemática?".

A iniciação docente traz consigo a mobilização de diferentes saberes. Notamos que os saberes da experiência têm sua origem na prática cotidiana do professor em confronto com as condições da profissão e, deste confronto com o vivido, é que o sujeito vai ressignificando seus saberes (TARDIF, 2013). As limitações enfrentadas pelos professores fornecem experiências formadoras e transformadoras, permitindo a eles desenvolverem práticas concretas que se incorporam em sua aprendizagem individual ou coletiva, sob a forma de saber fazer e saber ser, que acabam por se transformar em estilos de ensinar e buscar caminhos que iluminem as soluções de seus problemas.

Com isso, as falas dos egressos sinalizam para a insegurança vivida diante da complexidade em adequar ou transgredir os saberes que os sujeitos trazem acerca do ensino, os saberes didáticos que foram construídos ao longo de sua história, e que são colocados em xeque neste início de carreira, quando se evidencia, além da instabilidade da docência e das pressões presentes no universo escolar, a importância de manter uma boa relação com os alunos e de saber reger uma sala de aula.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa estudou algumas dificuldades evidenciadas pelo professor no trabalho docente na sala de aula em que atuavam, onde permitiu realizar percepções e reflexões mediante intervenção na prática de formação do professor novato da Licenciatura em Matemática da UNIMONTES.

Notamos que as principais dificuldades dos professores iniciantes foram o desinteresse dos alunos e a sua indisciplina. Esses são alguns desafios apresentados e que precisam ser superados nessa realidade, pois ao observar a forma como imaginaram resolvê-los, eles se depararam com dificuldades para além da formação inicial que receberam na Universidade como alunos durante o curso. Assim, ao apontar algumas tentativas de superar tais dificuldades, mencionaram que era responsabilidade da família dos alunos, como foi o caso da professora Ester, enquanto outros, como o caso de Lucas, viram a possibilidade de aprender a repensar melhor a sua própria prática ao buscar a elaboração de alternativas que pudessem auxiliar na solução desses desafios.

Apontamos que a Universidade precisa estar mais envolvida com os alunos egressos do curso de Matemática. Torna-se necessário focar em projetos que viabilizem a formação de conhecimentos teóricos indissociavelmente aos práticos, não só durante a formação, mas na continuidade da formação, em cursos ou encontros de estudo de formação em

serviço que tem a prática do professor como ponto de partida e chegada da formação dos professores. Espaços de formação, como os grupos colaborativos ou o Lesson Study, onde os professores criam tarefas ou desafios a serem pensados e implementados em sala de aula e depois discutidos coletivamente, oportunizando o desenvolvimento de uma visão mais especializada dos conhecimentos profissionais docentes situados na prática profissional (FIORENTINI; CARVALHO, 2015).

O estudo realizado aponta que a formação inicial não é responsabilidade exclusiva da Universidade ou da escola. Implica compromisso, engajamento e participação conjunta e articulada da família, da escola, da Universidade e das políticas públicas, mediante desenvolvimento de projetos que ajudem os professores a superarem as dificuldades que emergem da prática de sala de aula. Isso certamente irá permitir uma melhor ressignificação do ensino e criação de novas ações de trabalho por meio de tarefas exploratórias que favoreçam uma aprendizagem matemática relevante culturalmente aos jovens e crianças que frequentam a escola atual.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à JESUS por trazer entendimento sobre o planejamento, coleta, descrição, análise e escrita desse texto e, bem como aos professores iniciantes de Matemática da UEMG que participaram da pesquisa!

REFERÊNCIAS

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of Knowledge and Practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education**, USA, 24, p. 249-305, 1999.

FIORENTINI, D. Apresentação: Em busca de novos caminhos e de outros olhares na formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas: Mercado de Letras, 2003, p. 7-16.

FIORENTINI, D.; CARVALHO, D. L. O GdS como lócus de experiências de formação e aprendizagem docente. In: FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CARVALHO, D. L. (Orgs.). **Narrativas de Práticas de Aprendizagem Docente em Matemática.** São Carlos: Pedro & João Editores, 2015, v. 1, p. 15-37.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

HUBERMAN, M. O ciclo de vida profissional dos professores. In: NÓVOA, A. (Org.). **Vidas de professores**. 2. ed. Porto: Porto Editora Ltda, 1995. p.31-61.

LOURENCETTI, G. C. **Procurando "dar sentido" a práticas pedagógicas na 5ª série: analisando dificuldades e/ou dilemas de professores**. Dissertação (Mestrado em Educação). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 1999.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A (Org.). **Os professores e sua formação.** 2. ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p.13-33.

PIRES, D. B. Disciplina: construção da disciplina consciente e interativa em sala de aula e na escola. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 20, n. 66, p. 181-185, Abril, 1999.

PONTE, J. P.; GALVÃO, C.; TRIGO-SANTOS, F.; OLIVEIRA, H. O início da carreira profissional de professores de matemática e ciências. **Revista de Educação**, v. 10, n. 1, 31-45, 2001.

ROCHA, L. P.; FIORENTINI, D. Percepções e reflexões de professores de matemática em início de carreira sobre seu desenvolvimento profissional. In: FIORENTINI, D; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. S. (Orgs.). **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2009, p. 125-146.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 15. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987.

VASCONCELLOS, C. S. **Avaliação Concepção Dialética, Libertadora do Processo de Avaliação Escolar.** 11. ed. São Paulo: Libertad, 2009.

VEENMAN, S. Perceived problems of beginning teachers. **Review of Educational Research**, v. 54, n. 2, p.143-178, 1984.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores: idéias** e práticas. Lisboa: Educa, 1993.

CAPÍTULO 2

A AVALIAÇÃO NO MOVIMENTO EM REDE FEIRAS DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 18/12/2020

Paula Andrea Grawieski Civiero
Instituto Federal Catarinense (IFC)
Rio do Sul – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/6617701172635064

Alayde Ferreira dos Santos
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)
Senhor do Bonfim – Bahia
http://lattes.cnpq.br/9590973259708779

RESUMO: O Movimento em Rede Feiras de Matemática (MRFM), ao longo de seus trinta e seis anos de existência, teve a avaliação como tema em constantes discussões. Os avanços e desafios impostos ao longo do caminho, foram tratados por meio de discussões e avaliação da experiência, por meio de seminários de avaliação, com a colaboração de docentes, discentes e gestores. Nesse processo, a formação para os docentes que atuam junto ao MRFM se faz essencial. Diante disso, o presente capítulo vem apresentar uma proposta de formação, cujo objetivo é discutir e esclarecer sobre o processo de avaliação nas Feiras de Matemática, bem como sua contribuição para a formação docente. Defende-se que a formação tem caráter fundamental para que o MRFM ultrapasse fronteiras, mas sem perder seus princípios sociais e não meritocráticos.
PALAVRAS-CHAVE: Feira de Matemática, Avaliação, Formação docente.

EVALUATION IN NETWORK MOVEMENT MATHEMATICS FAIRS: A TRAINING PROPOSAL

ABSTRACT: The Mathematical Fairs Network Movement (MRFM), throughout its thirty-five years of existence, has had evaluation as a theme in constant discussions. The advances and challenges imposed along the way were treated through discussions and evaluation of the experience, through evaluation seminars, with the collaboration of teachers, students and managers. In this process, training for teachers working with the MRFM is essential. In view of this, this chapter presents a training proposal, the purpose of which is to discuss and clarify the evaluation process at Mathematics Fairs, as well as their contribution to teacher training. It is argued that the training it is fundamental for the MRFM to cross borders, but without losing its social and non-meritocratic principles.
KEYWORDS: Mathematics Fair, Evaluation, Teacher training.

1 I INTRODUÇÃO

O Movimento em Rede Feiras de Matemática (MRFM), se constitui como um espaço não formal de educação, o qual promove o encontro e o compartilhamento de experiências entre docentes, discentes e gestores. Ao articular a integração entre o ensino, a pesquisa e a extensão, promove formação para docentes e discentes, tanto de conhecimentos específicos de matemática e de

outras áreas, como de conhecimentos reflexivos, que tornam esse movimento dinâmico e humanizador. "Desde sua origem em 1985 a FM têm o viés de formação e de construção do conhecimento participativa e colaborativa junto aos professores e estudantes". (OLIVEIRA *et al*, 2019).

O MRFM, ao longo de seus trinta e seis anos de existência, sempre manteve a avaliação como tema de constantes discussões. Os seus idealizadores, Vilmar José Zermiani e José Valdir Floriani, vislumbravam a participação efetiva dos protagonistas, professores, estudantes e dirigentes educacionais em todo o processo. Essa participação, além do momento das Feiras, é feita por meio de assembleias e seminários de avaliação, cujo objetivo é pensar em melhorias para o desenvolvimento do evento.

O tema avaliação é polêmico em qualquer instância, por isso exige discussões e compreensão do processo, para que não se torne acrítico e enraizado num modelo positivista lógico. A avaliação no MRFM vem na contramão desse modelo e busca amenizar a meritocracia e a individualização, premiando todos os trabalhos. Portanto, tem como princípio a avaliação colaborativa, realizada a várias mãos e sob a éxide da indicação de melhorias no trabalho e valorização da socialização.

Scheller e Gauer (2007) defendem que a avaliação nas FM é formativa, isto é, contribui para que o sujeito avaliado reflita sobre si e suas ações permitindo o aperfeiçoamento de suas intenções iniciais. Oliveira *et al* (2019) ampliam esse conceito e defendem a avaliação nas FM como formativa e colaborativa. Formativa na perspectiva de desenvolver a autonomia, numa relação estabelecida pelo diálogo e colaboração. Colaborativa, no sentido de aproximar as pessoas num coletivo que trabalhe conjuntamente, colaborando com ideias e ações em todo o processo. Isto é, a "relação de diálogo e colaboração desenvolve a autonomia dos sujeitos envolvidos, a qual é uma característica estruturante nos processos de formação que se pretende humanizadores". (OLIVEIRA, 2017, p. 202).

Nesse contexto, propiciar formação para os docentes é fundamental. Justifica-se a preocupação com a formação, por concordarmos com Giroux, para quem é "mais apropriado começar com os educadores, que tanto medeiam quanto definem o processo educacional" (1986, p. 253), e por concebermos que, "ao objetivar mudanças no processo escolar e, mais ainda, no meio social, é fundamental preparar professores autônomos para que assumam posturas críticas por um caminho contrário à sustentação do *status quo"*. (CIVIERO, 2016, p. 57).

O MRFM além de socializar o conhecimento matemático específico, também tem caráter provocador, no sentido de fornecer subsídios para que o docente, ao compartilhar e vivenciar as distintas experiências, se aproxime de uma concepção epistemológica crítica. Civiero (2016, p. 91) corrobora essa preocupação ao destacar a premência da formação de professores que

> [...] evidencie a concepção crítica do professor, voltada para uma educação que valorize a condição do ser humano neste planeta Terra; por uma condição cuja equidade social prevaleça diante das ambições e egoísmos; por uma sociedade cujos construtos científicos, tecnológicos, políticos, econômicos, educacionais, entre tantos outros, sejam determinados em função da manutenção da vida.

Com essa compreensão, o presente capítulo tem a finalidade de discutir e esclarecer sobre o processo de avaliação dos trabalhos socializados, bem como sua contribuição para a formação docente no MRFM. Para tanto, traçamos o percurso histórico da avaliação, seus avanços e desafios, durante esses trinta e seis anos do MRFM. Em seguida, apresentamos uma proposta de minicurso para formação de docentes sobre o processo avaliativo realizado no XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)[1] e posterior considerações finais.

2 I O PERCURSO DA AVALIAÇÃO NO MOVIMENTO EM REDE FEIRAS DE MATEMÁTICA

A avaliação no MRFM se faz constante em três etapas, isto é, antes, durante e após cada evento, com caráter próprio e critérios bem definidos. Conta com uma comissão de avaliação, coordenadores de grupos de avaliação e avaliadores de trabalhos e está em constante avaliação de si mesma. Por sua vez, esse processo exige avalição constante e, transformação sempre em busca de facilitar, aprimorar e manter os princípios que fazem desse evento um diferencial na Educação Matemática brasileira

Além da avaliação dos trabalhos apresentados em cada FM, esse movimento também requer avaliação crítica constante, a qual acontece nos *Seminários de Avaliação e Gestão das Feiras de Matemática,* com seus objetivos ampliados a cada realização. Neles, são reunidos organizadores, professores orientadores, alunos participantes, avaliadores de trabalhos e quem mais se interesse pelo MRFM. Desde então, já foram realizados seis *Seminários de Avaliação e Gestão das Feiras de Matemática*, todos em Santa Catarina: em 1993, 2006, 2009 (em Blumenau), 2001 (em Brusque), 2013 (em Rio do Sul)[2] e 2017 (em Camboriú).

Gauer (2004, p. 27) já chamava atenção sobre a necessidade de discussões sobre avaliação em que se deveria "analisar a avaliação como processo e não como produto, visto que ocorre em todas as Feiras", sejam elas, escolares, municipais, regionais, estaduais e, desde 2010, também nas nacionais. Vale ressaltar que o MRFM, quanto à avaliação, passou por processos de transformação, com mudanças marcantes e atualmente é realizada de forma contínua, processual e diagnóstica. Observa-se que tais mudanças tiveram como objetivo não instigar a competição entre os protagonistas, mas sim impulsionar a importância da socialização e das sugestões por melhorias em cada trabalho.

1. A proposta deste minicurso foi publicada no XIII ENEM e ampliada para este capítulo.

2. Nesse, passa a ser denominado Seminário Nacional de Avaliação e Gestão de Feira de Matemática, por envolver mais Estados da Federação.

Nesse ínterim, muitas inquietações vêm à tona e a preocupação quanto ao papel da avaliação nesse movimento, sempre está em pauta. Diante disso, Andrade Filho *et al* (2017, p. 280) apontam que

> A avaliação nas Feiras pode assumir um caráter formativo. E nesse espaço muitas indagações podem ser formuladas: Quando avaliar? Por que avaliar? Como avaliar? Para quem? Quais os objetivos e finalidades da avaliação nas Feiras de Matemática? Dentre essas e outras questões, defende-se um processo dinâmico e cooperativo, bem como subsidiar as ações do professor orientador e do aluno no aperfeiçoamento do trabalho desenvolvido.

Perguntas essas que devem ser uma constante em todo o processo avaliativo. Diante delas, cada avaliador é responsável para o desenvolvimento dessa prática, de forma a atender aos objetivos da Feira enquanto espaço que promove a construção, a reconstrução e a divulgação dos conhecimentos matemáticos presentes nos trabalhos das categorias que socializam, além da comunidade de forma geral, e todos envolvidos num mesmo processo (ZERMIANI e MULLER, 2017).

O processo de avaliação do MRFM e dos trabalhos apresentados em cada FM, está imbricado com todas as instâncias que constituem o movimento, exigindo assim, compreensão de todo seu processo . Para tanto, a formação de professores para atuarem nas FM como orientadores, bem como avaliadores se faz essencial. Conhecer todos os trâmites, os regulamentos, os princípios que regem esse movimento, bem como a sua essência, poderá facilitar o envolvimento e a garantia desses processos, para que não hajam retrocessos, principalmente, quando a pauta é avaliação.

3 | UMA PROPOSTA PARA FORMAÇÃO DOCENTE

As FM como espaço de socialização e produção de conhecimento, tem como objetivos: promover a divulgação de conhecimentos dos estudantes e dos professores, numa perspectiva de interrelação; viabilizar a interação entre os professores da área e entre áreas distintas; promover o espírito investigativo; estimular a pesquisa, a investigação, a curiosidade, a argumentação, o questionamento como propulsor de conhecimento. Assim, para que tais objetivos possam ser atingidos, o processo de avaliação é de extrema importância, e suas concepções devem ser compartilhadas por todos os envolvidos.

Com essa preocupação, no V Seminário Nacional de Avaliação e Gestão das Feiras de Matemática em 2013, deliberou-se pela necessidade de promover cursos para preparar os professores para melhor assumirem os papéis seja de orientador ou de avaliador nas FM, em busca da construção de uma linguagem coerente e ética no processo orientação/avaliação.

Destacamos que se trata de dois processo de avaliação: o do MRFM, que acontece nos *Seminários de Avaliação*, e outro nas Feiras de Matemática cujo objeto são os trabalhos apresentados em cada evento. Com isso, a concepção da avaliação no MRFM

está relacionada a um processo contínuo, ou seja, ao que acontece: a) Antes da Feira – discentes e docentes avaliam e ajustam o trabalho a ser apresentado durante o evento; b) Durante a Feira - nos olhares dos docentes responsáveis pela avaliação; c) Após a Feira - quando o docente [orientador] recebe a síntese da avaliação e pode retomar com seus discentes os pontos destacados nela (CIVIERO, *et al*, 2015), o que caracteriza a avaliação na Feira de Matemática.

Diante disso, relatamos a proposta de um minicurso de formação sobre a avaliação, que foi realizado no XIII ENEM, que ocorreu em Cuiabá (MT) em 2019 e teve duração de quatro horas. Contudo, salientamos que a mesma proposta pode ser expandida e ser desenvolvida em cursos de formação com outra carga horária, possibilitando a ampliação das discussões. Pode acontecer num coletivo ou até mesmo como uma orientação individual para estudos sobre a temática. Geralmente os cursos de formação para as FM são ofertados em algumas etapas de 8h de duração cada.

Momento	Tempo	Atividades
1º dia		
1º Momento	....	Apresentação entre os participantes Apresentação do processo histórico do MRFM
2º Momento	....	Discussão sobre avaliação nas FM: Para quê? Por quê? Para quem?
2º dia		
3º Momento	...	O papel do avaliador; Fichas de avaliação e seus critérios
4º Momento	...	Movimento do processo avaliativo nas FM
5º Momento	...	Contribuições e avaliação da proposta.

Quadro 1 – Planejamento do Minicurso

Fonte: As autoras

Iniciamos a conversa por uma questão fundamental: para quê e para quem nos envolvemos no MRFM? Essa questão é crucial, no sentido de que antes de tudo precisamos entender o que nos move a querer participar de espaços que se propõe a provocar mudanças em algumas perspectivas da Educação Matemática, que ainda estão enraizadas no positivismo lógico e, por sua vez, na racionalidade técnica. Essa resposta é individual, mas ao mesmo tempo reforça um coletivo que se mostra desconformado, que almeja propiciar espaços de investigação, de reflexão e de crítica nas aulas de matemática.

O diálogo realizado por Alice o e o Gato no célebre livro “As Aventuras de Alice no País das maravilhas”, escrito por Lewis Carroll em 1865, nos ajuda a ilustrar esta questão. Vejamos um fragmento desse diálogo:

Alice – Por favor, como devo fazer para sair daqui?

Gato – Depende muito de aonde você quer ir.

Alice – Aonde não tem importância.

Gato – Então não tem importância o caminho que você tomar.

A reflexão é justamente essa, se não se sabe para onde se quer ir, qualquer caminho serve, portanto, ao nos aproximar do MRFM, temos um caminho a ser trilhado, o qual exige dedicação, estudos, provocações e muito afeto. Nessa perspectiva, o MRFM se propõe a promover a divulgação de conhecimentos dos discentes e dos docentes, numa perspectiva de interrelação; viabilizar a interação entre os professores da área e entre áreas distintas; promover o espírito investigativo; bem como estimular a pesquisa, a investigação, a curiosidade, a argumentação e o questionamento como propulsor de conhecimento.

Após essa primeira reflexão, para apresentar o processo histórico do MRFM, usamos como subsídio Oliveira e Zermiani (2020); Oliveira, Silva, Possamai e Zabel (2019); Oliveira e Santos (2017); Oliveira, Piehowiak e Zandavalli (2015); Zermiani e Biembengut (2014), os quais sugerimos fortemente a leitura. Conforme nos apontam Oliveira e Zermiani (2020, p. 85)

> Desde o início das Feiras de Matemática, os seus mentores se preocuparam com a publicização dos princípios e das Feiras em si em eventos de reconhecimento regional, nacional e internacional. Também cuidaram para que as Feiras fossem espaço constante de formação de professores, proposta democrática de aproximação entre universidade e escola com oportunidade da participação efetiva das escolas.

Por isso, a importância da realização de cursos de formação para os docentes, como forma de uma aproximação maior com as escolas de Educação Básica e posterior conhecimento sobre esse movimento. Além disso, a necessidade de que conheçam sobre a história desse movimento, bem como seus princípios e objetivos. Por ser um evento educacional, científico e tecnológico, sua organização não se dá em um processo linear, fechado e fixo, o que leva a um constante avaliar de suas ações e também apresentar a formação dos envolvidos, como um processo de reflexão constante dos seus objetivos.

A reflexão neste momento se desdobra da afirmação trazida por Postman e Weingartner (1971, p. 180): “Se acho inexequível uma mudança, devo lembrar que o sistema que está aí é mais inexequível, o menos prático no propósito de facilitar a aprendizagem”. Uma afirmativa que se mantem acesa há mais de 5 décadas, a qual o MRFM vem reapresentar e se colocar como uma alternativa potencializadora para mudanças nas práticas de sala de aula de matemática, que priorizem a investigação, a reflexão e a construção do conhecimento.

No segundo momento, para adentrar na discussão sobre avaliação nas FM, principalmente ao refletir para quê, por quê e para quem, cabe-nos, em primeiro plano, entender a concepção de avaliação que se tem no Movimento. Os cinco eixos essenciais que delimitam esse processo, são de uma avaliação: não meritocrática, colaborativa, qualitativa, processual e, portanto, formativa. Para essa discussão indicamos algumas leituras prévias, em que os escritos são de pessoas que estão totalmente envolvidas no MRFM e, portanto, trazem elementos fundamentais para a significação deste processo. Tais fundamentos podem ser encontrados em: Oliveira; Civiero e Guerra (2019); Andrade Filho, et al (2017); Breuckmann (1996); Civiero; Possamai e Andrade Filho (2015); Gauer (2004). Aproveitamos para divulgar que na página da SBEM[3] estão disponíveis muitos materiais sobre o MRFM que podem auxiliar nos estudos.

Para apresentar as mudanças e alterações mais significativas, a partir das discussões colaborativas e reflexões coletivas ocorridas entre os envolvidos trazemos o quadro 3. Esse, auxilia a remontar a história dos desafios e avanços da avaliação no MRFM, ocorridos do período de 1985, quando de sua criação, até os dias atuais.

Ano	Proposição avaliativa	Avaliação	Observações
1985 – 1986	Ficha de avaliação contendo 8 critérios de avaliação.	Média aritmética com notas de 0-10. Avaliação classificada como “premiados” ou “menção honrosa”. Os premiados recebiam troféus e medalhas de ouro, prata e bronze. Portanto, classificatória para os 3 primeiros lugares da Feira.	Ata de avaliação pela Comissão Central Organizadora (CCO). Assembleia da II Feira (1986) deliberou pela suspensão da avaliação dos trabalhos para a Feira de 1987.
1987	Foi avaliado o evento pelos orientadores e expositores.	A não avaliação permaneceu apenas durante a III Feira Catarinense de Matemática (1987, Joaçaba, SC).	Na III Feira Catarinense de Matemática, foi deliberado um novo formato de premiação (Premiação para os três primeiros lugares de cada categoria).
1988-1998	Ficha de avaliação contendo 7 critérios gerais e específicos por modalidades.	Por meio de Média Aritmética das notas de 0-10. Premiação classificatória para os 3 primeiros lugares por categoria/ modalidade.	No I Seminário de Avaliação (1993), foi avaliado todo o processo das Feiras e deliberado: Alteração de 3 para 7 modalidades; Discussão constante e criação de novos critérios de avaliação (gerais e específicos por modalidade).
1999-2001	Ficha de avaliação com 7 critérios gerais e por modalidade.	Por meio de Média Aritmética das notas de 0-10.	Premiação para 70% dos trabalhos como Destaque ou Menção Honrosa. 30 % sem premiação.

3. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/feiradematematica/>

2002 – 2004	Ficha de avaliação - critérios gerais e por modalidade.	5 critérios de avaliação, sendo um deles específico por Modalidade[1]. Média aritmética com notas de 0-10. Em 2002 houve reunião por grupo de avaliação para consensuar resultados.	35% Destaques; 35% Menção Honrosa e 30% sem premiação. II Seminário de Avaliação das Feiras de Matemática (2001). Deliberou-se que egressos expositores de trabalhos podem fazer parte da comissão de avaliação.
2005	Ficha de avaliação - critérios gerais e por modalidade.	Através da média das notas de 0-10 atribuídas pelos avaliadores.	Foram premiados até 50 % Destaques e 30% não premiados.
2006-2008	Ficha de avaliação contendo 5 critérios de avaliação	Ficha de avaliação com parecer descritivo do avaliador. Deliberação do III Seminário de Avaliação das Feiras de Matemática (2006).	Premiação[2]: Até 50% Destaques e 30% dos trabalhos não premiados.
2009-2012	Ficha de avaliação contendo 5 critérios de avaliação	Ficha de avaliação com parecer descritivo do avaliador. Criação de grupos de avaliação com coordenador.	Premiação para todos os trabalhos: 50% Destaques e 50% Menção Honrosa. Deliberação do V Seminário de Avaliação das Feiras de Matemática (2013).
2013-atual	Ficha de avaliação contendo 5 critérios de avaliação	Ficha de avaliação com parecer descritivo do avaliador. Grupos de avaliação com coordenador.	Premiação para todos os trabalhos: 75% Destaques e 25% Menção Honrosa. Deliberação do V e VI Seminários de Avaliação das Feiras de Matemática (2013).

Quadro 3: Proposições avaliativas das Feiras de Matemática – o movimento em rede

Fonte: OLIVEIRA; CIVIERO; GUERRA, 2019, p. 22 - 23)

Notas: [1] Há três modalidades de trabalhos nas FM: Matemática Aplicada e/ou Interrelação com outras disciplinas, Matemática Pura e Materiais Instrucionais e/ou Jogos Didáticos. [2] Os trabalhos são premiados, a partir de avaliação descritiva, em Destaques ou Menção Honrosa.

Desde o início do MRFM a preocupação com a avaliação foi constante e com caráter para aprimoramento de trabalhos e projetos, com mudanças ocorridas a partir de deliberações em espaços coletivos e colaborativos. As alterações ocorridas ao longo do tempo nos mostram os avanços, no sentido de, cada vez mais, buscar amenizar a competição e a não meritocracia. Nas palavras de Abreu (1996, p. 19), a qual apresentou um dos primeiros escritos sobre as FM, podemos ter esse subsídio.

> Inicialmente a avaliação dos trabalhos, feita por um grupo de professores não privilegiava a concorrência ou a premiação, nem pretendia incentivar a competição entre os alunos. A avaliação feita por uma comissão tinha por objetivo contribuir para o aprimoramento dos trabalhos e subsidiar teoricamente alunos e professores para execução de novos projetos.

Para manter a ideia inicial apresentada por Abreu, se faz importante ter clareza de todas as etapas da avaliação. Assim, para compor o terceiro momento da formação ora sugerida, primeiramente propomos uma breve discussão sobre o papel do avaliador e na sequência um reconhecimento das Fichas de Avaliação e estudos de seus critérios. Para

tanto, sugerimos como material de estudo os textos de Oliveira; Civiero e Possamai (2019) e Oliveira; Civiero e Guerra (2019). A priori, os avaliadores precisam entender que

> [...] a proposta central da avaliação nas FM é ouvir, conversar, ler o material, entender o processo de construção do trabalho, para assim, sugerir, instigar, aprender, ensinar e compartilhar conhecimentos, de modo que a avaliação aconteça numa perspectiva formativa, a qual tem imbricada o diálogo e a colaboração. (OLIVEIRA; CIVIERO; GUERRA, 2019, p. 26).

Nessa perspectiva, cabe aos avaliadores assumirem uma postura crítica/reflexiva. Além do mais, ela precisa ser cuidadosa e afetiva. O cuidado e afeto estão diretamente relacionados a forma de observar e ouvir atentamente o que os expositores têm a dizer. Quando os avaliadores se reúnem e discutem cada trabalho e suas distintas percepções, se constitui o espaço de colaboração e formação. Isto é, a escrita cuidadosa e clara da ficha de avaliação precisa apontar os itens mais relevantes do trabalho avaliado e indicar onde ocorreu falhas, com sugestões para melhorias futuras.

Nesse processo, a avaliação também se transforma em formação para os próprios avaliadores que, quando abertos ao diálogo e a escuta ativa, aprendem com os expositores e com os demais avaliadores de seu grupo. As discussões nos grupos de avaliação, podem render muito aprendizado quando o grupo se dispõe a isso. Dessa forma , fica explicitado que a postura do avaliador é essencial para que a avaliação aconteça dentro do esperado no MRFM. Ressalta-se que há algum tempo, passou-se a convidar todos os orientadores de trabalhos para serem avaliadores, desse modo, os docentes compreendem todo o processo, fazendo parte e ajudando a construir o MRFM de maneira cada vez mais sólida em seus princípios.

Nessa ótica, reconhecer os documentos que norteiam as FM se faz essencial. No caso da avaliação, o estudo requer um olhar cuidadoso para a ficha de avaliação e seus critérios. Isso acontece normalmente em toda FM, durante uma formação para coordenadores de grupo e os docentes que comporão os grupos de avaliadores de trabalho. Essa formação visa garantir que os princípios do MRFM, que regem esse processo, sejam garantidos. Ou seja, "visa garantir os princípios de avaliação descritiva e pormenorizada, avaliação diagnóstica e processual e compressão dos critérios de avaliação". (OLIVEIRA; CIVIERO; POSSAMAI, 2019, p. 13).

Nesse momento do curso, cada participante recebe uma ficha, discute com seus colegas de curso, as compreensões sobre cada critério e em seguida, é realizada uma discussão coletiva, buscando esclarecer cada item, bem como o que deve ser observado para avaliar cada um dos critérios. Os critérios que constam da ficha de avaliação são: comunicação do trabalho, domínio do conteúdo matemático, qualidade científica, relevância social e ênfase dada ao conteúdo matemático.

A avaliação é descritiva, isto é, se faz necessário escrever a avaliação sobre cada item. Entretanto, primeiramente se dá de forma individual, cada avaliador assiste

aos trabalhos separadamente, depois se reúnem no grupo de avaliadores para discutir e consensuar sobre os resultados. Após isso, juntamente com o coordenador de grupo, se escreve um relatório síntese da avaliação coletiva. Esse relatório é enviado para os orientadores após o evento.

No minicurso que ocorreu no XIII ENEM, os participantes foram provocados, a assistir os trabalhos expostos na mostra da FM, durante o XIII ENEM (2019) [4] e realizar uma simulação de avaliação, para assim, experienciar o debatido no minicurso.

Nessa conversa, já adentramos no quarto momento da formação, que trata de olhar para todo o movimento do processo avaliativo nas FM. Santos; Oliveira e Civiero (2020) compreendem as FM como espaço democrático, em que a insubordinação criativa e a discussão coletiva proporcionam a formação dos professores. Esses, por sua vez, podem transformar o ensino da matemática em uma perspectiva que proporcione a investigação, a quebra de paradigmas tradicionais, cujos docentes e discentes, sejam agentes ativos no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, o processo avaliativo é dinâmico e muitos agentes contribuem para que aconteça. Destacamos os gestores das FM, que são membros da Comissão Permanente do MRFM e/ou compõe a Comissão Central Organizadora (CCO). Esses,organizam a avaliação antes das FM e dão suporte durante e após o evento; , durante a FM se destacam os coordenadores de grupo, os professores orientadores/avaliadores e os expositores. São muitos sujeitos que participam em distintos momentos. Por isso, o processo avaliativo inicia antes da FM, acontece durante a FM e tem continuidade após o evento, quando o orientador e expositores recebem a ficha avaliativa com as sugestões e buscam reavaliar o próprio trabalho, com a possibilidade de complementar e apresentar numa próxima FM.

Por fim, o último momento da formação é reservado para as contribuições e avaliação da proposta. Cada formação é reavaliada, reestruturada e repensada para cada público, conforme o tempo de interação e as expectativas do público. Esse espaço de análise e crítica do que foi discutido é fundamental, pois sempre estamos em movimento e em constante transformação. Assim, as compreensões, as experiências compartilhadas em cada curso de formação contribuem para que o próprio MRFM de fortaleça.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao considerar o processo histórico do MRFM nos últimos trinta e seis anos, bem como a sua crescente expansão para os estados brasileiros, percebe-se a relevância de socializar e discutir o processo avaliativo tanto do MRFM quanto dos trabalhos socializados nas FM.

4. Nessa mostra foram expostos e socializados setenta (70) trabalhos, distribuídos entre as categorias de Educação Infantil, Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais, Ensino Médio e Ensino Superior.

Muitos foram os avanços e desafios do processo avaliativo nesse crescente movimento, cada mudança foi considerada a partir da experiência e colaboratividade dos docentes, discentes e gestores que participam das Feiras em suas distintas instâncias, seja regional, estadual ou nacional. Também, considera-se que a processo avaliativo contribui para a formação docente, no que tange a sua participação, tanto como orientador quanto como avaliador de trabalhos. Entretanto, para um efetivo processo se faz premente, cada vez mais, oportunizar espaços de discussão e disseminação dos princípios e trâmites da avaliação nas FM, entre docentes de todo o território brasileiro. Entendemos o ENEM como um espaço propício para esse debate, por ser um evento da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e concentrar num único evento docentes que possam vir a participar de todo os espaços das FM, em especial, da avaliação. Esse foi um dos objetivos pelo qual realizamos o minicurso no evento, oportunizando a divulgação do MRFM e propiciando formação aos docentes. Contudo, a proposta, ora apresentada, pode ser reproduzida em outros espaços, desde que sejam consideradas as leituras básicas aqui indicadas com intuito de garantir os princípios do evento. Por isso, as referências listadas ao fim deste capítulo são também instrumentos basilares para estudos e formulação de outros cursos de formação.

Por fim, os curso de formação, com a finalidade de discutir e esclarecer sobre o processo de avaliação dos trabalhos socializados, bem como sua contribuição para a formação docente nas FM, tem caráter fundamental para que o MRFM ultrapasse fronteiras, mas sem perder seus princípios sociais e não meritocrático.

REFERÊNCIAS

ABREU, Maria Auxiliadora Maroneze. As Feiras de Matemática: compromisso político pedagógico do Educador Matemático. Educação Matemática. **Revista Catarinense de Educação Matemática**. SBEM/SC, ano 1, n. 1, 1996, p. 18-19.

ANDRADE FILHO, Bazilicio Manoel de1; CIVIERO, Paula Andrea Grawieski; MALEWSCHIK, Andreza Faria; PIEHOWIAK, Ruy; SANTOS, Alayde Ferreira dos; VANDERLINDE, André. Avaliação em Feiras de Matemática: histórico e reflexões. In: VI Seminário Nacional de Avaliação e Gestão das Feiras de Matemática, IFC: Camboriú, 2017. **Anais ...**, p.278-289, 2017.

BIEMBENGUT, Maria Salett; ZERMIANI, Vilmar José. **Feiras de Matemática: História das Ideias e Ideias da História.** Blumenau: Legere/Nova Letra, 2014.

BREUCKMANN, Henrique João. Avaliação de trabalhos: uma longa caminhada. Educação Matemática. **Revista Catarinense de Educação Matemática**. SBEM/SC, ano 1, n. 1, 1996, p. 23-28.

CIVIERO, Paula Andrea Grawieski; POSSAMAI, Janaína Poffo; ANDRADE FILHO, Bazilício Manoel de. **Avaliação nas Feiras de Matemática:** processo de reflexão e cooperação. *In*: HOELLER, Solange Aparecida de Oliveira *et al* (Orgs). **Feiras de Matemática:** percursos, reflexões e compromisso social**.** Blumenau/IFC, 2015.

CIVIERO, P.A.G. **Educação Matemática Crítica e as implicações sociais da Ciência e da Tecnologia no Processo Civilizatório Contemporâneo**: embates para Formação de Professores de Matemática. 2016. 382 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

GAUER, Ademar Jacob. Critérios de avaliação de trabalhos em Feiras de Matemática: um olhar voltado para o processo. *In*: ZERMIANI, V. J. (Org.). **Feiras de Matemática: um programa científico & social**. Blumenau, Acadêmica, 2004.

GIROUX, H. **Teoria crítica e resistência em educação**. Petrópolis: Vozes, 1986.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; ZERMIANI, Vilmar José.FEIRAS DE MATEMÁTICA: UMA MANIFESTAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA. **Educação Matemática em Santa Catarina** [Recurso eletrônico]: contextos e relatos / organização Diretoria SBEM/SC 2018-2020. Florianópolis – SC: SBEM – SC, 2020, p. 82-101.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; CIVIERO, Paula Andrea Grawieski; GUERRA, Lucas Leite. Avaliação nas Feiras de Matemática como processo de formação de professores. **Revista DYNAMIS**. FURB, Blumenau, V.25, N.2, 2019, p. 18 – 38.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; CIVIERO, Paula Andrea Grawieski; POSSAMAI, Janaina Poffo. O Trabalho Colaborativo da Comissão Permanente das Feiras de Matemática: Cenários, Bastidores e Formação de Professores **Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 24, n. 62, p. 125-139, abr./jun. 2019.**

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; SILVA, Viviane Clotilde da; POSSAMAI, Janaína Poffo; ZABEL, Marília. Historicidade e concepções epistemológicas das Feiras de Matemática. In: XIII Encontro Nacional de Matemática, 2019, Cuiabá (MT). **Anais eletrônicos ...**. SBEM. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>. Acesso em: 16 dez. 2020.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; SANTOS, Alayde Ferreira dos. Gestão Colaborativa das Feiras de Matemática. In: Seminário Nacional de Avaliação e Gestão das Feiras de Matemática, 6, 2017, Camboriú. **Anais eletrônicos...** IFC: Camboriú, 2017. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/feiradematematica/anais.html>. Acesso em: 16 de dez. 2020.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de. **Pactos e impactos da Iniciação Científica na formação dos estudantes do Ensino Médio.** 2017. 343 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

OLIVEIRA, Fátima Peres Zago de; PIEHOWIAK, Ruy; ZANDAVALLI, Carla. Gestão das Feiras de Matemática: em movimento e em rede. In: Solange Aparecida Hoeller de Oliveira; Fátima Peres Zago de Oliveira; Paula Andrea Grawieski Civiero; Morgana Scheller; Ruy Pieowiak. (Org.). **Feiras de Matemática:** desafos, reflexões e compromisso social. 01 Ed. Blumenau: IFC, v. 01, 2015, p. 31-48.

POSTMAN, N.; WEINGARTNER, C. **Contestação**: nova fórmula de ensino. Tradução de Álvaro Cabral. Editora Expressão e Cultura: Rio de Janeiro, 1971.

SANTOS, Alayde Ferreira dos; OLIVEIRA, Fátima Peres Zago; CIVIERO, Paula Andrea Grawieski Civiero. As Feiras de Matemática: espaço democrático de insubordinação, discussão coletiva e formação de professores. **International Journal for Research in Mathematics Education – RIPEM**, v.10, n. 1, 2020, p.44-59.

SCHELLER, Morgana, GAUER, Ademar Jacob. Avaliação em Feiras de Matemática: Olhando para o Interior da Prática Avaliativa Propriamente Dita. In: III Seminário de Avaliação das Feiras Catarinenses de Matemática, 3., 2006, Brusque. **Anais...** Blumenau: Odorizzi, 2007. p. 83-98

SILVA, Viviane Clotilde; POSSAMAI, Janaína Poffo. Avaliação dos trabalhos nas Feiras de Matemática: uma atividade colaborativa e processual. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Ano 14/n. 30/jan.-abr. 2019, p. 106-120.

ZERMIANI, Vilmar José; MULLER, Iracy. Organização, estrutura e aspectos logísticos de inscrição e de avaliação das Feiras de Matemática. In VI Seminário Nacional de Avaliação das Feiras de Matemática, 2017, Camboriú, **Anais...** p. 307-318.

CAPÍTULO 3

UMA CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS TÉCNICAS DA TRANSFORMADA INTEGRAL CLÁSSICA (CITT) E GENERALIZADA (GITT): ASPECTOS INICIAIS

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão em: 21/12/2020

Reynaldo D'Alessandro Neto
IGCE – UNESP – Rio Claro
http://lattes.cnpq.br/5378461037048572

RESUMO: Estes resultados parciais de uma pesquisa de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, insere-se na linha de pesquisa Relações entre História e Educação Matemática e tem como objetivo descrever a evolução histórica que culmina na concepção da Técnica da Transformada Integral Clássica, e as motivações que levaram a sistematização do seu modelo generalizado. As técnicas têm como foco resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) a princípio não tratáveis pelas teorias clássicas, como o conhecido método da separação de variáveis. Pretendemos fazer uma construção histórica, considerando o contexto do seu surgimento e desenvolvimento, passando pelas diversas modificações ao longo dos estudos e necessidades de se tornar uma técnica mais competitiva para a evolução do mundo tecnológico. Para atingir esse objetivo, faremos uma abordagem historiográfica que começa ao descrevermos algumas motivações históricas dos desenvolvimentos da Transformada Integral, e as principais ideias da Transformada Integral Finita por N.S. Koshlyakov. Além dos estudos detalhados realizados por G.A. Grinberg (1948), que generaliza os métodos de Koshlyakov, para o caso de mudança das propriedades do meio na direção da coordenada ao longo da qual a transformação é executada. E a aplicação de M.D. Mikhailov (1972), que propõe um núcleo de núcleo de processamento geral que unificou as várias transformações desenvolvidas até então, obtendo a solução para a equação da difusão linear em regiões finitas. Para assim, podermos entender esses movimentos que são precursores da proposta da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT – Classical Integral Transform Technique), de Özisik e Murray (1974). E, por fim, dos conceitos que surgiram com o formalismo da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT - Generalized Integral Transform Technique), proposta por Özisik e Mikhailov (1984). Nesses resultados parciais de pesquisa, apresentamos os passos descritos acima até a contribuição de Mikhailov (1972), que serão finalizados com a análise dos escritos que fundamentam a CITT e GITT.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática, Equação Diferencial Parcial - EDP, Transformada Integral, Técnica da Transformada Integral Clássica – (CITT), Técnica da Transformada Integral Generalizada – (GITT).

A HISTORICAL CONSTRUCTION OF CLASSICAL INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE (CITT) AND GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE (GITT): INITIAL ASPECTS

ABSTRACT: These partial results of PhD research of the Program in Mathematical Education of UNESP - Rio Claro, is part of the

research line Relations between History and Mathematical Education and aims to describe the historical evolution that culminates in the conception of the Technique. Classical Integral Transform, and the motivations that led to the systematization of its generalized model. The techniques focus on solving partial differential equations (EDP) at first not treatable by classical theories, such as the well-known method of variable separation. We intend to make a historical construction, considering the context of its emergence and development, going through the various modifications throughout the studies and the need to become a more competitive technique for the evolution of the technological world. To achieve this goal, we will take a historiographical approach that begins by describing some historical motivations of developments in the Integral Transform, and the main ideas of the Finite Integral Transform by N.S. Koshlyakov. In addition to detailed studies by G.A. Grinberg (1948), who generalizes Koshlyakov's methods, in the case of changing the properties of the medium in the direction of the coordinate along which the transformation is performed. And the application of M.D. Mikhailov (1972), who proposes a general processing nucleus that unified the various transformations developed so far, obtaining the solution for the finite region linear diffusion equation. Thus, we can understand these movements that are precursors of Özisik and Murray's (1974) proposal of the Classical Integral Transform Technique (CITT). And finally, the concepts that emerged with the formalism of the Generalized Integral Transform Technique (GITT), proposed by Özisik and Mikhailov (1984). In these partial research results, we present the steps described above until the contribution of Mikhailov (1972), which will be finalized with the analysis of the writings that underlie the CITT and GITT.
KEYWORDS: Math History, Partial Differential Equations – PDE, Integral Transform, Technique of the Classical Integral Transform – (CITT), Generalized Integral Transformation Technique – (GITT).

1 | INTRODUÇÃO

Durante o mestrado, participamos do grupo de Simulação e Experimentos para Microfiltração e Ultrafiltração da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba. Nesse grupo, estudávamos modelagens matemática relacionadas aos problemas de filtração tangencial, dentre as soluções que se aplicavam aos problemas, as Técnicas da Transformada Integral Clássica (CITT) e Generalizada (GITT) eram as mais estudadas. E com o interesse sobre o assunto, tivemos um contato direto com diversos materiais de estudo que trazem embasamento relacionado a suas aplicações.

E durante o processo da escrita da dissertação, percebemos a necessidade de um estudo histórico sobre a teoria, devido a dificuldade de se encontrar informações relativas ao tema. Assim, iniciamos um levantamento e verificamos a originalidade de tal estudo.

E sabemos da importância de se fazer uma pesquisa histórica de conteúdos matemáticos, pois, através delas podemos perceber que todas as descobertas se deram com o estudo de outras feitas por matemáticos que viveram anteriormente, como se cada nova descoberta fosse apenas mais uma etapa da construção de um conhecimento universal na busca de resolver algum problema.

Com isso, uma pesquisa que envolva a história de um conteúdo matemático tem grande relevância para a Matemática, pois pode servir como um instrumento para o futuro pesquisador como um compilado de informações relevantes, no nosso caso, da técnica estudada.

E assim, podemos entender quais foram os problemas de aplicação que motivaram o desenvolvimento de tal conteúdo. Como comenta D'Ambrosio (2000, p.162):

> Em todas as conceituações, os estudos de História dependem fundamentalmente do reconhecimento de fatos, de datas e de nomes e de interpretação ligados ao objeto de nosso interesse, isto é, do corpo de conhecimentos em questão. Esse reconhecimento depende de uma definição do objeto de nosso interesse. No nosso caso específico, depende do que se entende por Matemática.

No nosso caso, estamos especialmente interessados no desenvolvimento de métodos de soluções para Equações Diferenciais Parciais (EDP). Sabemos que diversas técnicas na forma de métodos puramente numéricos, métodos analíticos e ainda métodos híbridos analítico-numéricos foram desenvolvidos.

Dentre as técnicas analíticas, temos o clássico método da Separação de Variáveis, importante técnica que determina a solução de equações diferenciais parciais, mas de abrangência bastante reduzida, uma vez que o modelo matemático deve obedecer a uma série de restrições para que o problema seja separável.

Para resolver EDP a princípio não tratáveis pela Separação de Variáveis, surgem novas abordagens, dentre essas, a Técnica da Transformada da Integral Clássica (CITT). O método elimina totalmente a necessidade de o problema ser separável, por exemplo, as equações diferenciais que governam os processos de difusão (principalmente a de calor).

Segundo o professor Renato Machado Cotta, no seu artigo de 2012, intitulado *The Unified Integral Transforms (**UNIT**) algorithjm with total and partial transformation: A tribute to Prof. Mikhail D. Mikhailov*, e o professor Aleksei Luikov, no seu livro *Heat and Mass Transfer* de 1972, as ideias precursoras que culminaram na concepção da CITT foram sugeridas por N.S. Koshlyakov em seu livro *Basic Differential Equations of Mathematical Physics,* de 1936.

Nesse livro, Koshlyakov define um tipo de transformação integral que ficou conhecida posteriormente como Transformada Integral Finita.

Depois das primeiras ideias, G.A. Grinberg fez um desenvolvimento mais detalhado das transformações integrais no livro *Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects,* de 1948.

Mas foi o artigo escrito por M.D. Mikhailov em 1972 intitulado *General Solution of the Heat Equation in Finite Regions*, que deu uma contribuição extremamente significativa para a consolidação da técnica de Koshlyakov. No estudo, o autor elabora uma proposta de um núcleo de processamento geral que unificou as várias transformações ao obter uma solução geral para a equação da difusão linear em regiões finitas.

Finalmente, M.N. Özisik e R.L. Murray em 1974 no artigo *On the Solution of Linear Diffusion Problems With Variable Boundary Condition Parameters,* utilizaram as ideias dos autores citados anteriormente e, aplicaram pela primeira vez uma nova técnica para a resolução de sistemas de Equações Diferenciais Parciais (EDP), chamada posteriormente de Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT – *Classical Integral Transform Technique*).

Em alguns casos de problemas propostos por Özisik e Murray (1974) se caracterizava pela presença de termos não transformáveis pela CITT, que mesmo assim foram inseridos na fórmula de inversão. Para a recuperação do problema original, foram obtidas soluções aproximadas deste sistema de equações diferenciais, nasce aí a natureza híbrida analítico-numérica do procedimento adotado e os primeiros passos na Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT - *Generalized Integral Transform Technique*).

Em 1984, Özisik e Mikhailov, no livro *Unified Analysys and Solution of Heat and Mass Difusion,* apresentaram uma maneira sistemática de aplicação da Técnica da Transformada Integral para a solução de diversos problemas lineares de difusão, divididos em sete grandes classes que foram definidas partindo de inúmeros problemas de transferência de calor e massa disponíveis na literatura. Desse trabalho surgiram os formalismos da GITT.

Essas evoluções, segundo Cotta (2012), ocorreram devido ao período da corrida tecnológica espacial, onde diversos países do Leste Europeu como a URSS e Bulgária, tiveram suas pesquisas concentradas no desenvolvimento de ferramentas analíticas, tal como a Técnica da Transformada Integral, buscando economizar os recursos computacionais quase que indisponíveis nestes países.

Concomitantemente, os Estados Unidos e Europa concentravam-se no desenvolvimento aos métodos puramente numéricos, como os conhecidos: Métodos de Diferenças Finitas, Elementos Finitos e Volumes Finitos, que se tornaram viáveis com o advento do computador.

E assim, durante a década de 1980, vários pesquisadores norte-americanos, soviéticos e búlgaros trabalharam conjuntamente, visando desenvolver técnicas híbridas analítico-numéricas, que conseguissem unir as características positivas de cada tipo de abordagem do problema.

Como essa introdução ao tema, podemos delimitar nossos objetivos, que para esta pesquisa será descrever a evolução histórica que culmina na concepção da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) e do seu modelo generalizado (GITT). Com a intenção de formar um compilado para futuros pesquisadores e professores que pesquisem e/ou ensinem na área.

Como iremos apresentar um resultado parcial da nossa pesquisa, este texto conterá o que foi melhor desenvolvido na pesquisa até o presente momento. Com isso, traremos os passos descritos acima até a contribuição de Mikhailov (1972).

2 | MOTIVAÇÕES HISTÓRICAS E O DESENVOLVIMENTO DE KOSHLYAKOV

Segundo Deakin (1985) no artigo *Euler's Invention of Integral Transform*, os estudos considerados como precursores das Transformações Integrais são do matemático Leonhard Euler. Deakin comenta que as primeiras ideias de transformação devem ser encontradas em um fragmento de Euler (1763) dedicado a resolução de uma equação diferencial em específico. E, mais tarde, em um capítulo do conhecido livro *Institutiones Calculi Integralis* de Euler (1769), onde o tratamento é mais completo e geral, mesmo sendo muito incipiente. Esses trabalhos envolvem transformações integrais de grande reconhecimento.

Cotta et al. (2017) no texto *Analytical Methods in Heat Transfer,* comentam que no trabalho de Fourier de 1807, *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides,* e seu tratado, *Theorie Analytique de la Chaleur* de 1822, foi consolidada a formulação matemática de fenômenos de condução de calor em termos de uma equação diferencial parcial para a temperatura dentro de um corpo, com as variáveis de espaço e tempo.

De acordo com Cotta et al. (2017), somente mais tarde que Dirichlet foi capaz de fornecer uma solução exata para cada formulação diferencial parcial, incluindo análise da equação de condução de calor no formato retangular, sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

E assim, algumas soluções das EDO precisavam satisfazer a propriedade da ortogonalidade, e por isso geram infinitas soluções em forma de expansões e séries infinitas de funções onde o produto entre elas é zero (condição de ortogonalidade). Foi aí que a teoria desenvolvida pelos dois matemáticos franceses entre 1829 e 1837, Sturm-Liouville, obteve uma grande aplicação.

Desse modo, foi aberto um novo caminho para uma metodologia de solução analítica mais abrangente, que ficou conhecida como o método da Transformada Integral. Essa técnica de resolução possui diversas abordagens desenvolvidas ao longo da história, dentre as mais conhecidas estão a Transformada de Laplace e de Fourier.

Renato Machado Cotta, no seu artigo de 2012, intitulado *The Unified Integral Transforms (**UNIT**) algorithjm with total and partial transformation: A tribute to Prof. Mikhail D. Mikhailov*, nos apresenta diversos dados históricos que estão diretamente relacionados as propostas de M.D. Mikhailov, M.N. Özisik, e, posteriormente, na concepção de um algoritmo que facilita a implementação da GITT.

Nesse caminho, Cotta (2012) explica que o Trabalho de N.S. Koshlyakov (1936) nos forneceu uma primeira ideia ao lidar com equações de difusão não homogêneas e condições de contorno pelo método das Transformações Integrais Finitas.

No livro de 1936, intitulado *Basic Differential Equations of Mathematical Physics,* do russo, *Osnovnye Differentsial'nye Uravneniya Matematicheskoi Fiziki,* N.S. Koshlyakov, estuda uma série de problemas físicos que envolvem EDP.

Com o auxílio do Prof. Renato Cotta, encontramos o exemplar original em Russo de 1936 e comparamos com a publicação de 1964 intitulada *Differential Equations of Mathematical Physics,* escrita por N.S. Koshlyakov, M.M. Smirnov e E.B. Gliner. Com a análise das duas obras, verificamos que a presença da Transformada na publicação de 1936 está de forma diluída no texto, durante a solução de cada problema proposto pelo autor. Já no livro de 1964, vemos um capítulo inteiro dedicado ao trato da Transformada Integral, de um modo didático e compreensível. Assim, escolhemos a obra de 1964 para a realização do nosso estudo.

O objeto de nosso estudo está presente na parte IV desse livro. No primeiro capítulo dessa seção e XXXI do livro, vemos o título: *The use of integral operators in solving problems in mathematical physics.*

Part IV. Supplementary material

Figura 1 - Sumário do Capítulo XXXI

No início do item 1 desse capítulo, Koshlyakov define "operador integral" e explica que esses termos são aplicados aos resultados de uma transformação. Assim, para Koshlyakov, a transformação da forma:

$$\bar{u}(\gamma_1,\ \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m; x_{m+1}, \dots\ , x_n)$$
$$= \int \int \dots \int_S K(x_1, \dots\ , x_m; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)\ \mathrm{u}(x_1, \dots . x_n) dx_{1..} dx_m$$

É a Operação (Transformada) Integral na região *S* pela qual a função original $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em relação às n variáveis é transformada em uma função $\bar{u}(\gamma_1,\ \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m; x_{m+1}, \dots\ , x_n)$ com m variáveis $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ e n-m variáveis $(x_{m+1}, \dots, x_n)$, com núcleo (Kernel) $K(x_1, \dots, x_m; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ dado que m ≤ n.

Koshlyakov, após demonstrar nos itens do seu capítulo, as definições básicas, condições de utilização e o desenvolvimento da técnica para intervalos finitos e infinitos, finaliza o capítulo, no item 5, com um resumo para facilitar o uso dos métodos dos

operadores integrais. Dentre as principais relações e passos, destacamos o núcleo (Kernel) do operador proposto por Koshlyakov, que se tornou muito aplicável nas resoluções de EDP que possuem correlação com fenômenos físicos:

$$K(x_i, \gamma) = \frac{1}{C_\gamma} \rho(x_i) \overline{K}_\gamma(x_i)$$

Onde C_γ; $p(x_i)$; $\overline{K}\ (x_i,\gamma)$ são funções determinadas por Koshlyakov, utilizando os coeficientes da EDP dada. E, a solução problema original, expressa em termos da solução $\overline{u}_\gamma$ do problema transformado, por meio das séries:

$$u = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \bar{u}(\gamma)\, \overline{K}_\gamma(x_i)$$

Por fim, Koshlyakov lista as várias operações que devem ser realizadas no caso de uma Transformada Integral dentro de limites finitos, na seguinte ordem:

(1) Estabelecer a validade de usar um operador no problema em questão.

(2) Calcule (a partir dos valores dos coeficientes da expressão diferencial) as funções C_γ; $p(x_i)$; $\overline{K}\ (x_i,\gamma)$

(3) Encontre a função $K\ (x_i,\gamma)$

(4) Encontre o kernel do operador direto.

(5) Use as relações para escrever o problema transformado.

(6) Encontre a solução do problema transformado. (Aqui, em particular, Koshlyakov sugere a aplicação repetida de transformações integrais).

(7) Escreva a solução do problema original na forma da série.

Destacamos aqui, seu método para intervalos finitos, porém, o autor também apresenta de maneira análoga sua metodologia para intervalos infinitos.

Com toda a descrição acima, vemos a contribuição de Koshlyakov para a construção inicial dessa Transformada Integral, ao mostrar o uso dos operadores integrais para intervalos finitos e infinitos, com núcleos (kernel) e operadores inversos definidos, bem como toda metodologia para se encontrar cada coeficiente ou função necessária para a técnica. É interessante ressaltar que o método de Koshlyakov é chamado em diversos livros, como nos de Luikov (1972) e Cotta (2012), de Transformada Integral Finita.

Acreditamos que isso se deve ao fato de que a técnica para intervalos finitos se tornou a mais utilizada em problemas de valor de contorno, ou seja, equações diferenciais parciais que possuem condições iniciais para sua resolução. Além de que, após a análise e leitura da proposta de Koshlyakov para intervalos infinitos, vemos que o autor faz uso de

manipulações matemáticas e sugere a utilização de transformadas conhecidas, como as de Laplace, Fourier e Hankel. Deixando para alguns casos especiais a utilização do seu método proposto para intervalos infinitos.

3 | DESENVOLVIMENTO DAS TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS DE G.A. GRINBERG (1948)

Por não encontrar a literatura original de G.A. Grinberg - *Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects* de 1948, foi pesquisado livros que fizessem menções e discussões sobre sua contribuição para o desenvolvimento da Transformada Integral. Dentre os estudos encontrados, foi o de A.V. Luikov (1972) que mais detalhou o desenvolvimento realizado por Grinberg.

Para Luikov (1972), as limitações dos métodos da Transformada de Fourier, Hankel e de Laplace, levou à criação de métodos da Transformada Integral Finita. E, mesmo para problemas que podem ser resolvidos pelos métodos clássicos com a ajuda da série de Fourier ou Fourier-Bessel, a Transformada Integral Finita é um método que pode ser preferível do ponto de vista da simplicidade de abordagem.

Segundo Luikov (1972), após a proposta de Koshlyakov, a teoria foi melhor desenvolvida por Grinberg (1948), que generalizou os métodos para o caso de mudança de propriedades do meio na direção dessa coordenada ao longo da qual a transformação é executada, principalmente em problemas de cunho físico (eletricidade e magnetismo)

Nesse desenvolvimento detalhado, os kernels K(p,x) utilizados são as transformações integrais finitas de Fourier e Hankel, escolhidos apropriadamente e com solução encontrada a partir do problema de Sturm-Liouville. Se as autofunções desse problema forem designadas por $X_n(x)$ e a ponderação das funções p(x) dentro do intervalo [a,b] então temos:

$$K(p,x) = p(x)X_n(X)$$

Dessa forma, Grinberg faz a sugestão do núcleo e o define a partir dos limites de integração. Para Luikov, Grinberg (1948) desenvolve um método que, além de facilitar a escolha do kernel, tem como ideia principal a escolha do mesmo em conformidade com a equação diferencial e as condições de contorno, isto é, levando em consideração forma geométrica do corpo e da lei de sua interação com o meio físico em questão.

4 | DESENVOLVIMENTO DAS TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS DE M.D. MIKHAILOV (1972)

Após o desenvolvimento de Grinberg (1948), os conceitos da Técnica da Transformada Integral Finita já estavam bem documentados em trabalhos científicos como

nos livros: *Integral Transform in Mathematical Physics* de C.J. Tranter (1962) e *The Use of Integral Transforms* de I.M. Sneddon (1972).

Mas foi a obra intitulada: *General Solution of the Heat Equation in Finite Regions*, publicada como artigo em 1972, por M.D. Mikhailov no *International Journal Engineering Sciences*, que deu uma contribuição extremamente significativa para consolidação a técnica.

Segundo Cotta (2012), a concepção da GITT sofreu uma grande influência das publicações de M.D. Mikhailov, em um período extremamente produtivo. Dentre essas produções, inclui-se o seu trabalho de 1972.

Mikhailov, no seu trabalho, propõe um núcleo de núcleo de processamento geral que unificou as várias transformações desenvolvidas até então, obtendo a solução geral para a equação da difusão linear em regiões finitas.

O objetivo do estudo de Milhailov será solucionar um problema de valor de contorno, ou seja, resolver a Equação Diferencial Parcial:

$$\varphi(\tau)w(M)\frac{\partial T(M,\tau)}{\partial \tau} = div[(K(M)\ grad\ T(M,\tau)] + [\beta(\tau)w(M) - \rho(M)]T(M,\tau) + P(M,\tau)$$

Onde div é divergente e grad o gradiente no espaço M. Com condição inicial:

$$T(M,0) = f_0(M)$$

E condição de contorno geral:

$$A(N)\frac{\partial T(N,\tau)}{\partial n} + B(N)T(N,\tau) = f(N,\tau)$$

Para resolver a equação nas condições dadas, segue a proposta de Transformada Integral Finita de Mikhailov:

$$\tilde{T}_i(\tau) = \int_V w(M)\psi_i(M)T(M,\tau)dV$$

Que segundo o autor será utilizada. É interessante reparar que a transformada sugerida possui um núcleo muito parecido com a sugestão de Grinberg (1948), caracterizado pela inserção da função peso w(M) e as autofunções $\Psi_i(M)$. Seguindo, a

partir da ortogonalidade das autofunções Ψ_i (M), que T(M,t) pode ser expandido na série (Operador Inverso) abaixo:

$$T(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_i(\tau) = \int_V G_i \psi_i(M) \tilde{T}_i(\tau)$$

Seguindo os procedimentos matemáticos, Mikhailov encontra solução desejada do problema, que é obtida como segue:

$$T(M,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i \psi_i(M) \exp\left(\int_0^{\tau} \frac{\beta(\tau) - \mu_i^2}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \left\{ \int_V w(M)\psi_i(M) f_0(M) dV \right.$$
$$+ \int_0^{\tau} \frac{1}{\varphi(\tau)} exp\left(\int_0^{\tau} \frac{\mu_i^2 - \beta(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau\right) \left[\int_s K(N) f(N,\tau) \frac{\psi_i(N) - \frac{\partial \psi_i(N)}{\partial n}}{A(N) + B(N)} dS \right.$$
$$\left. \left. + \int_V \psi_i(N) P(M,\tau) dV \right] d\tau \right\}$$

Após a leitura, podemos perceber que, Mikhailov ao utilizar as ideias da Transformada Integral Finita de Koshlyakov (1936), com um núcleo de transformada parecido com a sugestão de Grinberg (1948), propõe uma evolução que será de especial interesse para os pesquisadores de fenômenos difusivos. Para muitos físicos e matemáticos, encontrar essa solução aumenta sensibilidade do problema físico em questão, sendo mais fiel a realidade do experimento. Esse fato fica evidente na introdução desse artigo, e poderá ser percebido nas justificativas de Özisik e Mikhailov (1984) sobre o desenvolvimento da CITT e GITT, respectivamente.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pesquisarmos a técnica e realizar um levantamento histórico aprofundado, encontramos informações que relacionavam livros, artigos e datas de modo a construir uma linha do tempo bem clara. Acreditamos que após a leitura deste texto, podemos entender que a técnica proposta por Koshlyakov em 1936, foi aproveitada por diversos estudiosos como Grinberg e Mikhailov, que de certo modo ampliaram suas ideias e mostraram um novo modo de se resolver EDP que modelavam problemas clássicos da física. Com um futuro a ser descrito, com o desenvolvimento da CITT e GITT.

REFERÊNCIAS

COTTA, R. M. **The Unified Integral Transforms (UNIT) Algorithm With Total and Partial Transformation: A Tribute to prof. Mikhail D. Mikhailov.** 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Rio de Janeiro, RJ. 2012.

COTTA, R.M., KNUPP, D.C., QUARESMA, J.N.N. **Analytical Methods in Heat Transfer**, In: Handbook of Thermal Science and Engineering, Chapter 1, Francis A. Kulacki et al., Eds., Springer International Publishing. 2017.

D'AMBROSIO, U. **A interface entre história e matemática: uma visão históricopedagógica**. In: FOSSA, John A. (org.). Facetas do diamante: ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro: Editora da SBHMat. 2000.

DEAKIN, M. A. B. **Euler's Invention of Integral Transforms.** Archive for *History* of Exact Sciences 33 pp. 307-319. 1985.

EULER, L. **Institutiones Calculi Integral**. *VoL* 2 (Book 1, Part 2, Section 1). St. Petersburg: Imp. Acad. Sci. Reprinted as *Op. Omn.* I 12. 1769

EULER, L. **Constructio aequationis differentio-differentialis sumto elemento du constante***.* Novi Comm. Acad. Sei. Petrop. 8, 150-156. Op. Omn. I 22. 395-402. 1763.

FOURIER, J.B. (1822) **Théorie Analytique de la Chaleur***.* Firmin Didot Père & Fils, Paris. Transl. "The analytical theory of heat (unabridged)". Cosimo, New York. 2007.

FOURIER, J.B. **Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les solides***,* manuscript., Bibliothèque de l'École des Ponts et Chassées, Paris. *1807.*

GRINBERG, G.A. **Selected Problems of Mathematical Theory of Electrical and Magnetic Effects** (in russian*).* Akad: Nauk SSSR. 1948.

KOSHLYAKOV, N.S. **Basic Differential Equations of Mathematical Physics**. Moscow. 1936.

KOSHLYAKOV, N.S.; SMIRNOV, M.M.; GLINER, E.B. **Differential Equations of Mathematical Physics.** Translated by Scripta Techinca, Inc. North-Holand Publishing Company, New York. 1964.

LUIKOV, A.V*.* **Heat and Mass Transfer.** Mir Publishers. Moscow. 1972.

MIKHAILOV, M.D. **General Solution of the Heat Equation in Finite Region**. International Journal Engineering Sciences, vol. 7, pp. 577-591. 1972.

ÖZISIK, M.N.*;* MIKHAILOV, M.D. **Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**. John Wiley, New York. 1984.

ÖZISIK, M.N.; MURRAY, R.L. **On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters**. Journal of Heat Transfer, 96c:48–51. 1974.

SNEDDON, I. M. **The Use of Integral Transforms**. New York: McGraw-Hill. 1972.

TRANTER, C.J. **Integral Transform in Mathematical Physics**. New York: John Wiley. 1962.

CAPÍTULO 4

A FORMAÇÃO DA PROFESSORA DE MATEMÁTICA E O ESTÁGIO DE OBSERVAÇÃO: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Data de aceite: 01/03/2021

Fernanda Pereira Magalhães
Universidades do Estado da Bahia - Campus VII

Américo Junior Nunes da Silva
Universidade do Estado da Bahia - Campus VII

RESUMO: O presente trabalho propõe-se a apresentar um relato de experiências vivenciadas por uma estudante estagiária, do Curso de Licenciatura em Matemática, a partir do cursar o componente Estágio Curricular Supervisionado I, estágio destinado à observação do espaço escolar e, principalmente, dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. O estágio foi realizado em uma turma do 7º ano do ensino fundamental, de uma escola de um município pertencente ao Território de Identidade Piemonte Norte do Itapicuru. Este relato, portanto, tem por objetivo apresentar e refletir sobre as experiências vivenciadas ao longo do estágio de observação; uma vez que se trata de um espaço de formação importância para a formação do futuro professor e professora de matemática, reflexões sobre as práticas pedagógicas observadas e constituição da identidade docente.
PALAVRAS-CHAVE: Estágio, Práticas Pedagógicas, Aprendizagem.

ABSTRACT: The present work deals with an experience report lived by a graduate student in the Mathematics Degree Course, based on experiences from the Supervised Curricular Internship Component I, an internship aimed at observing the school space and, mainly, the teaching and learning processes. mathematics learning. The internship was carried out in a class of the 7th grade of elementary school in a school in a municipality belonging to the Territory of Identity Piemonte Norte do Itapicuru. Therefore, this item aims to: present and reflect on experiences lived during the observation stage; since it is an important training space for the training of the future teacher and teacher of mathematics, reflections on the observed pedagogical practices and constitution of the teaching identity.
KEYWORDS: Internship, Pedagogical practices, Learning.

1 I INTRODUÇÃO

O estágio supervisionado é um espaço de formação presente em todos os cursos de Licenciatura, atendendo a dispositivos legais como apontado por Silva (2020), e encarado algumas vezes de forma equivocada, considerado como o polo prático. Este fato contraria o que Pimenta e Lima (2004, p. 34) defendem, pois estas acreditam que a prática e a teoria são inseparáveis, definindo o estágio como sendo “[...] a atividade teórica de conhecimento, fundamentação, diálogo e intervenção na realidade, esta, sim, objeto

das práxis" e, salientam que "o estágio tem de ser teórico-prático, ou seja, que a teoria é indissociável a prática" (p. 34). Desta forma, é necessário que durante a sua realização levemos em consideração todos os conhecimentos trabalhados durante o curso, para assim termos melhor aproveitamento diante dessas vivências, formando e construindo o profissional que seremos.

Os cursos de Licenciaturas precisam formar professores preparados para assumirem uma sala de aula, entendendo que as salas possuem alunos de diferentes realidades e com níveis e ritmos de aprendizagens distintos; tendo, estes profissionais, de enfrentarem os diferentes desafios postos pela contemporaneidade. Outro ponto a se considerar é que a esses futuros professores cabe, também, ensinar o conteúdo matemático de maneira clara, de forma que os alunos tenham uma aprendizagem com significado. Assim, o Estágio Curricular Supervisionado (sendo este estágio de observação) é indispensável para o licenciando, dando a ele a oportunidade de refletir sobre as diferentes práticas pedagógicas e, também, sobre a necessária articulação que há entre teoria e prática, como asseveram Lima, Kegler e Broch (2019):

> O estágio como espaço de formação e de construção de identidade deve ter uma compreensão ampla, em que estejam presentes a escola, o trabalho docente e a sala de aula. A observação de sala de aula tem o objetivo de compartilhar conhecimentos, fazendo com que o estagiário tenha uma compreensão dos processos de ensinar e aprender entre professores e alunos, refletindo sobre suas histórias de vida, as possibilidades de ensino e aprendizagem e a construção de um conhecimento compartilhado. (LIMA, KEGLER e BROCH, 2019, p. 169).

Desta forma o presente trabalho tem por objetivo refletir sobre as experiências de uma estagiária com o componente de Estágio Curricular Supervisionado I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, Campus VII. O estágio foi realizado em uma turma de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública pertencente ao Território de Identidade Piemonte Norte do Itapicuru.

Importante destacar que este texto, pela natureza de sua escrita, transitará em diferentes tempos verbais: na primeira pessoa do singular, quando me referir as minhas reflexões pessoais; e na primeira pessoa do plural quando essas reflexões forem influenciadas, também, pelas leituras realizadas e pelo meu professor orientador, segundo autor deste texto.

Este relato foi organizado de forma que, a princípio, trouxesse algumas discussões a respeito do estágio e a formação de professores. Com relação ao detalhamento das experiências de observações de estágio, foram divididas em três tópicos: i) a escola; ii) o professor supervisor e; iii) a turma de alunos. Permitindo, dessa forma, que a experiência vivenciada fosse analisada e discutida minuciosamente.

2 | ESTÁGIO CURRICULAR SUPERVISIONADO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Pensamos ser oportuno iniciar essa seção destacando que os conhecimentos construídos ao longo da realização do curso de licenciatura são importantes para a constituição do professor de Matemática. Não se trata de hierarquizar, como evidenciou Silva (2014), e dizer que este ou aquele conhecimento é mais ou menos importante, pelo contrário, é entender que todos eles são completares e necessários.

Durante o vivenciar do estágio precisamos considerar tudo que foi estudado ao longo da licenciatura e refletir sobre tudo que experienciamos no espaço escolar; ou seja, a prática e a teoria caminham juntas e são igualmente importantes. Nessa direção, portanto, Pimenta e Lima (2004) destacam necessário

> [...] pensar o estágio em propostas que concebem o percurso formativo alternando os momentos de formação dos estudantes na universidade e no campo de estágio. Essas propostas consideram que teoria e prática estão presentes tanto na universidade quanto nas instituições-campo. O desafio é proceder ao intercambio, durante o processo formativo, entre o que se teoriza e o que se pratica em ambas. (PIMENTA e LIMA, 2004, p. 57).

Vale ressaltar que o estágio supervisionado possibilita ao estagiário refletir sobre o professor que deseja ser; ou seja, pensar a sua futura prática profissional a partir da observação da aula do professor supervisor. Destaco ainda que não estou falando de se espelhar em tal profissional e fazer a cópia de suas práticas e sim ter um olhar crítico sobre o observado, fazendo desse movimento de reflexão um importante mecanismo de constituir-se professor e professora de Matemática. Nesse sentido, como afirma Lima, Kegler e Broch (2019, p. 168) "este momento [de estágio] serve para vivenciar a profissão na prática, analisando o que é importante e adequado, além de ser essencial para a construção da identidade profissional docente, que inicia sua construção ao longo da formação acadêmica".

É importante ressaltar que estamos falando da formação de professores, então todas essas práticas citadas devem ser sempre reflexivas para este, de forma que se aprimore cada vez mais, sendo um melhor profissional e contribuindo para um melhor percurso de ensino e aprendizagem, como nos afirma Pimenta (1999).

Destarte, é necessário que o professor, ao desenvolver as suas práticas pedagógicas, volte fazendo uma análise desta a fim de melhorar aquilo que não foi suficiente para o aprendizado, isso ainda lhe permite transformar suas ações em sala de aula, se construindo num processo contínuo de ser professor (SILVA, 2020).

3 I OBSERVAÇÕES DO ESTÁGIO CURRICULAR SUPERVISIONADO I

3.1 A Escola Parceira

A escola é uma instituição que traz grande contribuição no que diz respeito ao desenvolvimento da sociedade. Segundo Coelho e Orzechowski (2011) esta surgiu a partir das necessidades de uma sociedade, contribuindo assim, para a construção do ser humano e desenvolvimento de um povo; e, afirmam ainda que

> [...] seu objeto de trabalho, o conhecimento. E esse conhecimento não é qualquer conhecimento, é o conhecimento sistematizado, construído nas relações sociais sim, mas já reconhecido como formal e essencial, não para a formação do aluno, mas para o desenvolvimento da espécie humana. Pois foi esse conhecimento que trouxe o homem até aqui [...]. (COELHO e ORZECHOWSKI, 2011, p. 16325).

Assim, podemos pensar que a escola além de mediar aos alunos conhecimentos das diferentes disciplinas, estes que também são de suma importância para entenderem os acontecimentos do dia a dia, também os preparam para estar em meio a uma sociedade em constante mudança para, consequentemente, intervir neste meio a fim de buscar o seu desenvolvimento, e também o seu crescimento como pessoa.

A escola que foi feito o estágio de observação está situada em uma cidade localizada na região norte do Estado da Bahia e atende somente estudantes dos anos finais ensino fundamental. É uma escola em campo territorial grande e que tem em sua estrutura física: sete salas de aula, uma secretaria com uma sala para os professores, dois pátios, cozinha e uma biblioteca. Embora o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola afirme ter laboratório de informática, não identificamos esse espaço ao longo de nossas observações.

Segundo D'Ambrosio (1993) o ambiente propício para a aprendizagem da matemática deve possibilitar aos alunos propor, explorar e investigar problemas de situações reais e lúdicas, dispondo de livros e computadores, bem como de outros materiais. Infelizmente, na referida escola, não tem sido assim; as salas são pequenas e acaba causando um desconforto, pois fica muito cheia e os ventiladores não funcionam bem. Em dias de calor, por exemplo, se torna muito difícil manter a atenção dos alunos por conta de tal desconforto e isso, se torna ruim para o aprendizado deles. A escola funciona nos turnos matutino e vespertino, mas o estágio foi realizado na turma do 7º ano do turno vespertino.

Segundo o PPP da escola, o processo educativo tem por objetivo proporcionar igualdade de condições a todos os educandos, mobilizar a comunidade interna e externa para participar dos movimentos pela melhoria do ensino e aprendizagem dos alunos, como também, trazer as discussões que os seres humanos estabelecem com o espaço e tempo que estão inseridos.

Assim, é notório que tal documento demonstra que a escola tem uma certa preocupação com a comunidade em geral, além dos familiares dos alunos. No entanto,

durante os dias de estágio não foi observado nenhum movimento para reunir tais pessoas, mas era perceptível que com relação aos responsáveis dos alunos, quando necessário, a diretoria os chamava para uma reunião particular. Vale ressaltar, também, que a escola oferecia serviços psicólogos, profissional que se encarregava de conversar com os alunos a fim de ajuda-los em situações pessoais e também escolares.

3.2 O Professor Supervisor

Foi entregue ao professor supervisor[1] do estágio um questionário com questões abertas a fim de conhecê-lo e saber de suas concepções em relação a pontos ligados ao ensino e aprendizagem da Matemática, como planejamento das aulas e recursos utilizados. Assim, as informações ditas sobre o professor, foram todas baseadas nas respostas obtidas no referido questionário e também nas observações durante suas aulas.

A professora supervisora de estágio é licenciada em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB, e tem uma carga horária de trabalho de 60 horas semanais. Trabalha em três escolas públicas diferentes, ensinando também além da disciplina de Matemática, a disciplina de Religião.

Com relação ao andamento das aulas, a professora destaca que para conseguir realizar uma boa aula é necessário a participação e interesse não somente do professor, mas sim, e, principalmente dos alunos. Ela diz ainda sobre a importância do planejamento de curso/plano anual, pois segundo ela, este lhe dá uma direção e objetivo a ser alcançado. Segundo Costa e Albuquerque (2015) definir objetivos a fim de alcança-los durante as aulas é importante pois, assim se busca um ensino diferenciado e de qualidade.

Em conversa com a professora, em intervalos da aula, ela afirmou realizar os planejamentos. O planejamento, segundo Silva, et al (2014) é de total importância, pois se faz o planejamento para conseguir eficiência no que se faz, ou seja, uma aprendizagem com significado. No entanto, quando solicitado esses planejamentos a professora, a mesma não nos disponibilizou; afirmando que ainda estava em processo de construção. Nesse sentido, continuou a dizer que este documento era vivenciado durante o ano, no entanto de maneira flexível diante a tantas limitações.

No que diz respeito a escolha dos livros, a professora destaca que eram levados em consideração a apresentação dos conteúdos, linguagem utilizada e as atividades, se estas eram apropriadas para os alunos. Segundo a professora também, os critérios utilizados para a definição do conteúdo são, aqueles que são pré-requisitos para que o aluno esteja apto para cursar o ano seguinte e, não mencionou levar em consideração a Base Nacional Comum Curricular, esta que se encarrega de determinar as aprendizagens necessárias que os alunos devem desenvolver. É importante destacar, também, que como é uma escola localizada numa cidade do interior da Bahia, com alunos de diferentes classes sociais, a linguagem dos livros deve ser clara de maneira que todos entendam, abordando algo mais próximo das suas realidades.

1. O professor da escola que nos recebe para a realização do estágio;

Sobre o processo de avaliação, a professora diz que é feito diariamente de forma contínua e, os instrumentos utilizados são atividades escritas, bem como, a participação e interesse nas atividades propostas. Neste sentido, Costa e Albuquerque (2015) destacam que por meio da avaliação o professor verifica se o aluno aprendeu. Além disso, os autores ainda destacam como importante o definir objetivos com a realização da avaliação, pois estabelecendo tais objetivos, busca-se a melhoria do ensino, e, a depender do resultado de tais avaliações, buscam-se também melhorias nas práticas pedagógicas. As autoras observaram que grande parte dos professores dispõe somente das avaliações escritas, se preocupando somente com o resultado final. É importante, concordando com Silva, Nascimento e Muniz (2017), que o professor e a professora tenham um olhar sensível para as diferentes produções matemáticas dos estudantes.

Tal fato, isso que apresentamos no parágrafo anterior, foi percebido durante esta etapa de estágio: a professora supervisora costumava fazer resoluções de problemas em sala de aula juntamente com os alunos, e, suas provas de avaliação eram sempre provas/testes escritos, em que se prioriza a aplicação de técnicas vistas durantes as aulas, com questões semelhantes e, eram realizadas, em sua grande maioria, em duplas.

Segundo D'Ambrosio (1993) é necessário que o professor perceba a Matemática como uma disciplina de investigação e "entenda que a Matemática estudada deve, de alguma forma, ser útil aos alunos, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar a sua realidade". Ressalta ainda que em sala de aula o professor não precisa assumir uma postura de detentor único do conhecimento e assim, trabalhar juntamente com os alunos nas investigações de problemas. Esse é o método que, segundo D'Ambrosio, traz ao aluno uma aprendizagem significativa da referida disciplina.

O que foi observado nas aulas é que se dão muitas vezes pelo método tradicional (aulas expositivas onde o assunto e exemplos eram copiados no quadro e os alunos o reproduziam no caderno). Sobre esse ponto a professora afirma que o trabalhar dessa forma se deve ao fato da escola não ter estrutura e materiais para realizar outras atividades. Às vezes, também, eram entregues aos alunos materiais xerocados sobre o assunto a ser trabalhado e, na sala de aula, se mantinha a resolução de exercícios. Tal fato contraria o que D'Ambrosio (1993) sugere e fica nítido que os alunos não têm assegurado, ao longo da disciplina, o prazer da descoberta. Além disso, estes não dispõem do livro didático para estudar em casa, pois, segundo a professora não tem quantidade suficiente que atendam a todos, assim os livros ficam na escola e eles usam somente quando estão na escola e na aula da disciplina de Matemática.

3.3 A Turma

Na turma eram matriculados, ao todo, 35 (trinta e cinco) alunos; porém frequentavam somente 23 (vinte e três). Era uma turma bem participativa, ajudam a professora no que era necessário. Como disse antes, o livro didático ficava na biblioteca da escola e quando

a professora chegava na sala já tinha uma ou duas alunas que se disponibilizavam para pegar os livros e distribuírem para o restante da turma.

Nessa turma existiam dois alunos com deficiência: um com Deficiência Múltipla e outro com Deficiência Intelectual. Segundo Silveira e Neves (2006, p. 79) a Deficiência Múltipla se caracteriza por “pessoas com duas ou mais deficiências de base associada” e ainda afirmam que a inclusão social deste é percebida, na maioria das vezes, como o estudante que tem necessidades educacionais mais intensas. Já a Deficiência Intelectual, segundo Dias e Lopes de Oliveira (2013) não tem ainda uma definição concreta, mas encontra-se em situação peculiar, pois atribuem-lhes uma cognição infantil, os excluindo do “direito a uma vida adulta autônoma e cidadã”, podendo ser comparada a deficiências motoras, deficiências sensoriais e deficiências de comunicação.

Vale ressaltar, também, que a professora destacou não possuir formação para trabalhar com alunos deficientes e, que a escola não tem um professor de apoio educacional em sala de aula para auxiliar esses alunos com deficiência. A escola, quando consultada, destaca que essa era uma responsabilidade da Secretaria de Educação que, infelizmente, não disponibilizava tal profissional.

Durante a avaliação, a maioria dos alunos destacava estar com dúvidas e que não sabiam do assunto. Importante destacar que os estudantes não tinham livro didático, como dissemos, e que contavam apenas com as anotações que faziam no caderno.

Seria importante, ao longo de todo o percurso de aprendizagem, propor diferentes tipos de problemas matemáticos (já que quase sempre eram semelhantes e pouco desafiadores). Os problemas propostos poderiam ser construídos a partir da realidade do aluno, instigando-os a pensar matematicamente. Como nos afirma D’Ambrosio (1993), para que aconteça a aprendizagem matemática é importante que conflitos cognitivos sejam criados e que diante das situações-problemas os estudantes sejam desafiados a construir as suas próprias respostas.

Houve uma experiência bastante interessante em uma das aulas, quando foram construídas figuram planas com o auxílio de massa de modelar e palitos. A atividade aconteceu da seguinte forma: Os alunos foram divididos em diferentes grupos e a professora foi trabalhando junto com eles. D’Ambrosio (1993, p. 37) afirma que para uma melhor aprendizagem matemática os problemas trabalhados devem vir de “situações reais (modelagem) como de situações lúdicas (jogos e curiosidades matemáticas) e de investigações e refutações dentro da própria Matemática” e ainda dispor de:

> [...] uso de recursos como livros, material manipulativo, calculadoras, computadores e diversos recursos humanos. Esses recursos devem ser utilizados conforme forem necessários para enriquecer a exploração e investigação do problema. Também podem servir para dar origem a problemas interessantes. (D’AMBROSIO, 1993, p. 38)

De fato, foi notado que nessa aula os alunos manifestaram terem compreendido melhor o assunto, a definição de cada elemento e como este se forma; sem contar que todos participaram, deram total atenção a atividade desenvolvida, não atrapalhando o andamento da aula. O objetivo da professora era mostrar a nomenclatura das figuras (que vem decorrente a quantidade dos lados, a quantidade de ângulos que existem em cada figura, como também, as diagonais de cada uma delas).

De um modo geral a turma era tranquila e, durante as observações, se mostraram amigáveis. No entanto, notamos que a disciplina de Matemática não era uma das preferidas deles. Eram comuns dúvidas no decorrer das aulas; as dúvidas mais frequentes eram com relações as operações fundamentais da Aritmética, principalmente com a multiplicação e a divisão. As aulas, em sua maioria, eram resoluções de atividade e os assuntos abordados durante estas foram figuras planas, transformações de ângulos, polígonos convexos e não convexos, grandezas proporcionais e regra de três simples.

Com relações a multiplicação e divisão, que os alunos apresentam dúvidas frequentes, seriam necessárias a construção de algumas estratégias didáticas, diferentes das realizadas em sala, na tentativa de que eles compreendessem melhor tais operações. Neste sentido, sugeriríamos uma oficina ou uma aula dedicada somente a isso, dispondo de objetos ou jogos que facilitassem a compreensão de tais operações.·.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, concluo que o estágio é um importante espaço de formação e constituição da identidade docente, sobretudo por proporcionar a imersão no espaço escolar, não mais como aluna, mas sim como futura professora. Além disso, foi a partir das observações realizadas e dos encontros que aconteciam na universidade, mediatizados pelas leituras propostas, que reflexões sobre o ensino, metodologias e experiências foram traçadas, pontos importantes quanto ao exercício da profissão. Vale ressaltar ainda que durante este momento e em conversas com a professora supervisor podemos entender sobre o funcionamento de preenchimento de cadernetas, sobre a necessidade de planejar bem a aula e a importância da realização de atividade diversas, de forma a atender os diferentes ritmos e tempos de aprendizagem dos estudantes.

Estar como professora em uma sala de aula não é se tornar o único detentor do conhecimento diante os alunos, mas sim, parte de um grupo de pessoas que estão ali em busca do conhecimento e dispostas a aprender. Lembrando: este conhecimento é resultado da descoberta e da percepção da matemática enquanto um espaço de pesquisa, onde o uso de materiais didáticos e outros recursos são importantes e influenciam diretamente o matematizar.

Vale ressaltar, também, que dentro de uma sala de aula existem pessoas de diferentes classes sociais e diferentes formas de pensar. É importante que o professor

saiba lidar com essas diferenças e inclua todos os estudantes, trabalhando como uma linguagem mais acessível e fazendo da própria matemática um espaço de romper com as desigualdades; o uso de problemas matemáticos mais próximos da realidade pode contribuir positivamente para isso, facilitando a compreensão e abstração dos assuntos, percebendo sua aplicabilidade no dia a dia.

REFERÊNCIAS

COELHO, Nara; ORZECHOWSKI, Suzete Terezinha. **A Função Social da Escola Pública e Suas Interfaces.** X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba. Novembro de 2011.

COSTA, Adreia Alves da; ALBUQUERQUE, Leila Cunha de. **Avaliação da Aprendizagem Matemática na Perspectiva dos Processos Avaliativos Utilizados por Professores do Ensino Fundamental Anos Finais**. Período Científico Projeção e Docência. V. 6. N. 2. 2015.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio.** Vol. 4 Nº 1. Março de 1993.

DIAS, Sueli de Souza; LOPES DE OLIVEIRA, Maria Cláudia Santos. **Deficiência Intelectual na Perspectiva Histórico-Cultural: Contribuições ao Estudo do Desenvolvimento Adulto**. Rev. Bras. Ed. Esp., Marília, v. 19, n.2, p. 169-182, Abr.-Jun., 2013.

LIMA, Kadja Silveira; KEGLER, Natália Alessandra; BROCH, Siomara Cristina. **Vivências de estágio de observação no ensino fundamental**. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 24, n. 62, abr./jun. 2019.

PIMENTA, Selma Garrido. **Formação de professores: identidades e saberes da docência**. In: Pimenta, Selma Garrido. (Org). Saberes Pedagógicos e atividade docente. São Paulo: Cortez Editora, 1999. (p. 15 a 34)

PIMENTA, Selma Garrido; LIMA, Maria Socorro Lucena. **Estágio e Docência**. São Paulo: Cortez Editora. Agosto de 2004.

SILVA, Américo Junior Nunes da; SOUZA, Ilvanete dos Santos de (Orgs); BARROS, Simone Santos; ALMEIDA, Jefferson Dias Silva. **O Professor de matemática e o Ato de Planejar: Há Unicidade entre Dimensão Política e Dimensão Pedagógica?** In: SILVA, Américo Nunes Junior da; SOUZA, Ilvanete dos Santos de (Orgs). A Formação do Professor de Matemática em Questão: Reflexões para um Ensino com Significado. Jundiaí, Paco Editorial: 2014.

SILVA, A. J. N.. **A Ludicidade no Laboratório: considerações sobre a formação do futuro professor de matemática**. 1. ed. Curitiba: CRV, 2014. 184p .

SILVA, A. J. N; NASCIMENTO, A. M. P; MUNIZ, C. A. O Necessário Olhar Do Professor Sobre A Produção Matemática Das Crianças Nos Anos Iniciais. **Educação Matemática Em Revista** (São Paulo), v. 22, p. 48-55, 2017.

SILVA, A. J. N. DA. “Prática” e “Estágio Supervisionado” na formação de professores: o que revela um curso de Licenciatura em Matemática da UNEB?. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e20034, 7 jul. 2020ª

SILVA, A. J. N. da. Professores De Matemática Em Início De Carreira E Os Desafios (Im)Postos Pelo Contexto Pandêmico: Um Estudo De Caso Com Professores Do Semiárido Baiano: doi.org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação** , [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 8 fev. 2021.

SILVEIRA, Flávia Furtado; NEVES, Marisa Maria Brito da Justa. **Inclusão Escolar de Crianças com Deficiência Múltipla: Concepções de Pais e Professores**. Psicologia: Teoria e Pesquisa Jan-Abr 2006, Vol. 22 n. 1, p. 79-88.

CAPÍTULO 5

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Data de aceite: 01/03/2021

Débora Gaspar Soares
Mestranda da Pós-Graduação em Geografia Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Membro do grupo de pesquisa: Para uma crítica da Economia Política do Espaço, do(a) Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/1106186788602404

Márcio Rufino Silva
Doutor em Geografia Humana, USP. Professor Adjunto na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/6001195417301978

RESUMO: O cenário da universidade em âmbito nacional tem experimentado alterações no seu espaço educacional derivadas de diferentes fatores, entre os quais compete destacar a implantação de Novas Tecnologias de Informação e Comunicação na prática docente. Esse estudo, busca a análise dessas mudanças que são fomentadas pelo Sistema Nacional de Inovação que orienta a CAPES, a FAPERJ, e o CNPq, na perspectiva da Teoria de Agnes Heller, na introdução sistemática de recursos inovativos nas atividades docentes em concordância com as exigências neoliberais e as mudanças que essas impõem ao exercício do professor, especialmente na construção do cotidiano em territórios virtuais, e na sua jornada de trabalho, dissuadindo os objetivos, a organização e a finalidade da educação.

PALAVRAS-CHAVE: Territórios virtuais, cotidiano, formação para o trabalho, Educação a Distância.

ABSTRACT: The university's scenario at the national level has experienced changes in its educational space derived from different factors, among which it is worth highlighting the implementation of New Information and Communication Technologies in teaching practice. This study seeks the analysis of these changes that are fostered by the National Innovation System that guides CAPES, FAPERJ, and CNPq, from the perspective of Agnes Heller's Theory, in the systematic introduction of innovative resources in teaching activities in accordance with neoliberal demands and the changes that these impose on the exercise of the teacher, especially in the construction of daily life in virtual territories, and in their working hours, deterring the objectives, organization and purpose of education.

KEYWORDS: Virtual territories, daily life, training for work, distance education.

1 I INTRODUÇÃO.

A formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), em nossa investigação, pretende abarcar as tramas, as tranças, e as teias da conexão entre sociedade e educação em EaD e o seu ritmo. Dialogar entre o global e o *sui generis*, entre a escola-instituição formadora das relações sociais de produção capitalista e as profusas

experiências possíveis da prática docente, que dão a conhecer profundas alteridades sócio espaciais, das quais se assemelham a uma travessia indefinidamente em alomorfia. Da mesma maneira essas alteridades quando se tenta fazer o elo, o *link*, essas revelam silhuetas, sombras, contornos, formas descontínuas, perfis variados, diversas escalas que em rede (o lugar, o regional, o nacional, o global) ´tangenciam o aspecto geográfico da sua formação. O que torna a leitura de Agnes Heller fundamental para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT) é sua teoria *marxista crítica,* sua biografia permite investigar o espaço social escolar como instituição, mas percebendo a presença, a ação, a atividade das pessoas, do sujeito indivíduo, do sujeito social, que na formação EaD se conecta, e tece redes sociais no seu cotidiano.

Para realização e análise das transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT), as alteridades sócio espaciais, com o ambiente laboral, e com a compreensão de mais valia há uma variedade de teóricos que alteia esse debatimento (Marx, 1983 [1867]; Silva, 2008; Damiani, 2016; Heller, 2016 [1970]; Lukács, 2003; Lefebvre, 1991; entre outros), dentre outras bibliografias pertinentes para o desenvolvimento desse trabalho. Além da bibliografia desses teóricos foi imprescindível o curso nas disciplinas: Epistemologia da Geografia, ministrada pelo Professor Guilherme Ribeiro; e A (Re)produção do Espaço e Cotidiano: Escalas do Urbano e sua Mobilização Crítica, ministrada pelo Professor Márcio Rufino. Essas disciplinas fazem parte do curso de Pós-Graduação em Geografia, e oportunizam o debate e entendimento da dinâmica do processo histórico no exercício das transformações e reproduções no espaço cotidiano. Foram realizadas com encontros presenciais, no prédio da Geociências, Departamento de Geografia em Seropédica no segundo semestre de 2018.

1.1 Entre links e comunicação, conforme Agnes Heller admite o contato em territórios virtuais

As discussões e argumentações relativas à renovação e formação das competências e habilitações do corpo social contemporâneo, circunscrevem os processos históricos e a premência social dos fatos, mas precisam criticar as conjunturas de produção capitalista, o acesso distinto a escola, e o arcabouço institucional que subjuga os seus participantes. Por isso, compreender a correlação entre saber e o poder presume assentir que uma implementação de política educacional, que requer a estruturação da inovação na sociedade presente é razão e circunstância para a reprodução material dessa forma de trabalho na sociedade. Em outros termos, o meio de produção capitalista depreende uma conformação de organização do saber que não é apenas retrato da vida escolar, essa não reflete nitidamente sobre os distintos protagonistas da vida na escola. Segundo Heller (2016 [1970], p.15): “podemos estabelecer a possibilidade de um subsequente desenvolvimento dos valores, apoiar tal possibilidade e, desse modo, emprestar um sentido à nossa história.”

Em conformidade Lefebvre (1991, p.8) diz: “o tempo é o tempo da mudança. Não aquele de uma simples modificação local, parcial, mas o tempo das transições e dos transitórios, o dos conflitos; da dialética e do trágico.” Já Luckacs (2003, p. 205) afirma que: “o tempo é tudo, o homem não é mais nada; quando muito, é a personificação do tempo.” Esses autores tornam claro que a análise do ordinário da vida, do cotidiano, fundamenta as questões, as indagações sobre as mudanças e transformações atuais na educação com o uso da inovação, determinadas pela elucubração econômica e pela influência cultural.

Os estudos acerca do Ensino a Distância no Brasil demandam uma exploração sobre o seu território, para conhecer a rede que se compõe apoiada na sua oferta. Nesse ínterim, a caracterização de rede está relacionada à circulação e alastramento da informação e conhecimento. Entretanto, os territórios virtuais na educação determinam a validação dos conhecimentos, e o contato virtual demarca quais pessoas podem ou não articular as práticas pedagógicas a eles relacionadas. Ocorre uma inibição da prática pedagógica, a manifestação do diálogo aberto é restringida. Contudo, qual é a ameaça da prática pedagógica para o professor? O maior risco da prática pedagógica é a reflexão, o que isso quer dizer? A reflexão acontece no diálogo, no confronto, e a prática pedagógica é também responsável pelas representações do sujeito como indivíduo, pois ela traz memórias, técnicas, recursos, maneiras de experienciar, formas de viver, ritmando as alteridades sociais que a alicerçam. Conforme Heller (2016 [1970], p.17) destaca: “a· vida cotidiana é a vida do homem inteiro; ou seja, o homem participa na vida cotidiana com todos os aspectos de sua individualidade, de sua personalidade.” A autora esclarece que a ameaça da prática pedagógica se desvalia na regulamentação das ações, no controle, no interdito, nos critérios, nos conteúdos, pois são definidos, eminentemente, por aqueles que regem as instituições, com critérios, mecanismos e processos para reconhecimento como verdade superior, e como valorização do professor. Portanto, as conexões em rede tornam complexa a presença dos territórios virtuais e a sua vinculação com a educação.

O que Agnes Heller coadjuva para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT)? Para perfazer o que foi discutido sobre sua teoria *marxista crítica*, na sociedade humano-digital, o sujeito usa a inovação, mas aniquila e desfaz a sua objetividade, então, esse sujeito se escraviza a um retalho de realidade, encerra a sua espontaneidade, o sujeito escravo não participa do imprevisto, nem do improviso, ao alienar-se suas ações propendem para particularidade. Há uma profunda ausência de consciência da ação do sujeito alienado gerando uma voragem fronte a criação do sujeito genérico, e isso que caracteriza a conjuntura dessa alienação. Em concordância com Heller (2016 [1970], p.20): “Os choques entre particularidade e genericidade não costumam tornar-se conscientes na vida cotidiana; ambas submetem-se sucessivamente uma à outra do aludido modo, ou seja, «mudamente”.” A autora salienta que essa voragem não alcança de forma equivalente os diversos estratos sociais num processo histórico, entretanto agravou-se exponencialmente no capitalismo neoliberal.

1.2 Inserção Social para a formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT)

A apresentação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) se concebeu em 2011, por intermédio de uma rede de instituições de Ensino Superior, via constituição da Universidade Aberta do Brasil, fomentada por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e estruturada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com a contribuição do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). De acordo com o Relatório Digital PROFMAT (2017, p.1): "o PROFMAT surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM." As políticas públicas no sentido de usar a inovação estimularam o desenvolvimento de cursos de Graduação, Mestrados Profissionais, dentre outros orientados para a EaD, pelo sistema da Universidade Aberta do Brasil (UAB), com expansão da sua oferta e engajamento de diversas instituições públicas. Esse estudo vai analisar o polo do PROFMAT na Universidade Federal do Rio de Janeiro, que oferece o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Estado do Rio de Janeiro desde a sua criação.
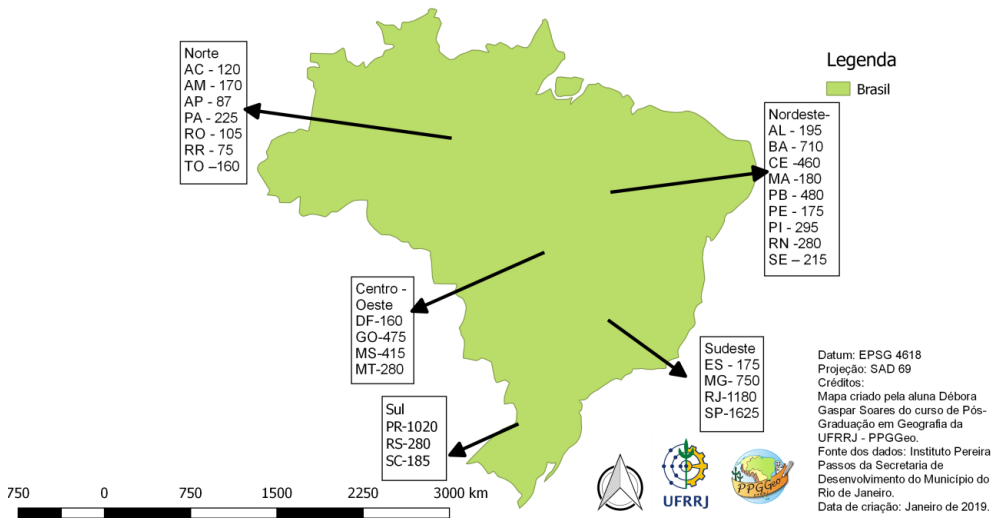
Figura 1: Número Total de vagas ofertas pelo PROFMAT (2011-2017)

Fonte: Instituto Pereira Passos.

Para realizar esse estudo com relação à inserção social na EaD analisando como, em geral, se suscita o cotidiano e a cotidianidade na formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), e compreendendo como, em particular, a teoria de Agnes Heller interpreta nossa sociedade informacional, onde prepondera o modo

capitalista de produção. O primordial recurso foi o site do PROFMAT no qual foi pesquisado, especialmente, o Relatório Digital de 2017; Regimentos; Portarias e Designações. Em seguinte, foram realizadas entrevistas que ocorreram na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, elas aconteceram no segundo semestre de 2018, com a Coordenação anterior e a atual Coordenação do PROFMAT, professores do ICE (Instituto de Ciências Exatas) que são membros do DEMAT (Departamento de Matemática da UFRRJ), essas que possibilitaram uma interação do ponto de vista das práticas produtivas, da ação cooperativa e das fontes de informação e conhecimento para inovação, respeitantes às características dessa amostra de estudo.

A efetivação, alastramento e promoção da inovação na prática pedagógica, por meio da rede em EaD, tipifica um arquétipo de inter-relação sócio espacial que reúne cidades como indicadores, que caracterizam os locais ou sítios, nos quais se organizam o contato, se criam as conexões, se formam as interações, que se geram pelos trânsitos de informações, e desenham um território virtual em rede. Destarte, a inovação no que se atribui a EaD, imputa uma expectativa social de ampliação e redimensionamento do lugar, de nova cartografia, de geração de novos caminhos, de criação de tecnologia, a partir de políticas públicas que fomentam o uso da rede nesse lugar. De acordo com Heller (2016 [1970], p.20): "o próprio cientista ou artista têm vida cotidiana: até mesmo os problemas que enfrentam através de suas objetivações e suas obras lhes são colocados, entre outras coisas (tão-somente entre outros, decerto), pela vida." Em conformidade Lukács (2003, p.215): "os instrumentos, as reservas, e os meios financeiros, indispensáveis tanto à empresa quanto à vida econômica, estão nas mãos do empresário, num caso, e do chefe político, no outro." Tal qual Damiani (2016, p.13) argumenta: "a industrialização envolve o imperativo do trabalho abstrato no campo e na cidade. Define-se como divisão social do trabalho, divisão campo-cidade. As relações sociais concorrenciais estruturam o fundamento das formas de sociabilidade modernas." Esses autores evidenciam que o uso da inovação promove uma interiorização em distintos graus de arquitetura de geografia das redes. E nos fazem refletir algumas questões: Para que o uso da EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática? Como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas? Como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores?

A estrutura do PROFMAT no polo da Universidade Federal do Rio de Janeiro é o local de funcionamento presencial do curso, o lugar físico onde ocorrem as aulas, e se encontram o aluno, tutor, professor, coordenação e outros agentes de conhecimento. O polo do PROFMAT-UFRRJ que coordena os sistemas e a infraestrutura que viabilizam as interações e os fluxos de informações. Apesar, do PROFMAT exigir o encontro presencial com os alunos uma vez por semana, o PROFMAT depende que a instituição polo ofereça laboratório de informática para os alunos, porque a proposta pedagógica primazia pela utilização da Plataforma Moodle de Educação, e é nesse ambiente virtual de aprendizagem

que se disponibiliza os fóruns, chats, webconferências, troca de mensagens, as disciplinas, as redes de comunicação, as vídeo-aulas (não foi encontrado o tempo de atualização desse material), e material didático, que só podem ser acessados pela internet, portanto configura a dependência desse modelo educacional às tecnologias informacionais em rede. De acordo com Damiani (2016, p.14): "a era urbana real e utópica, ao mesmo tempo, é a superação da crise implicada na separação campo-cidade. Ela identifica um elemento novo: a programação do consumo, a manipulação das necessidades, através do cotidiano; trata-se da cotidianidade." Em conformidade Heller (2016 [1970], p.30) afirma: "Na maioria das formas de atividade da vida cotidiana, as motivações do homem não chegam a se tornar típicas, ou seja, as motivações em permanente alteração estão muito longe de expressar a totalidade, a essência do indivíduo." Já Lefebvre (1991, p.23) destaca que: "O homem cotidiano se fecha em suas propriedades, seus bens e suas satisfações, e às vezes se arrepende. Ele está ou parece estar mais próximo da natureza do que o sujeito da reflexão ou, da cultura." Os autores discutem sobre a alienação propiciada pela sociedade informacional, e pelo modo de produção capitalista, no quanto essa se alastra para além do cotidiano, para a própria ciência contemporânea, para os modelos educacionais, e sobre os fundamentos e estruturas da vida cotidiana.
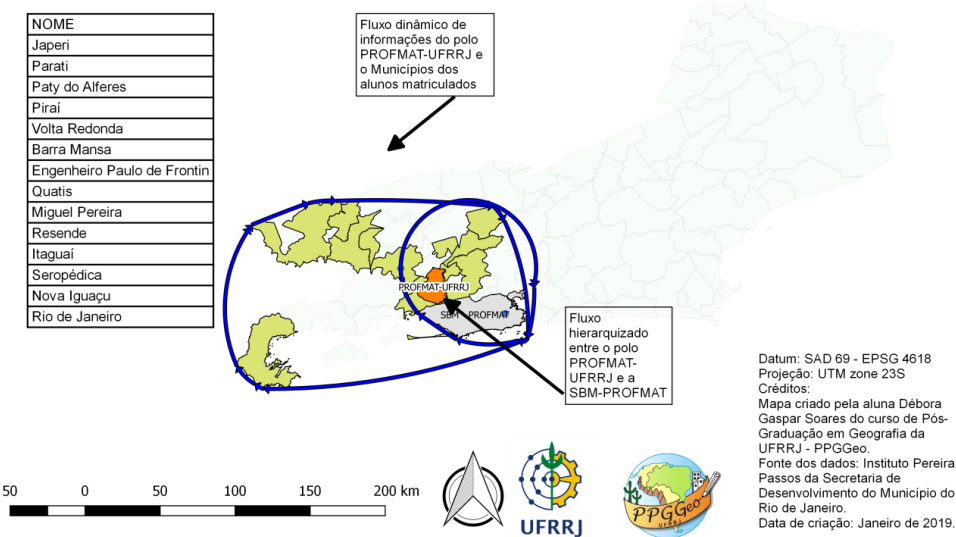
Figura 3: Fluxo de informação entre o polo PROFMAT-UFRRJ e os Municípios de origem dos alunos matriculados.

Fonte: Instituto Pereira Passos.

O PROFMAT, ao tornar-se adepto da EaD, adotou a modalidade semipresencial que busca conciliar as práticas pedagógicas virtuais e presenciais do aluno. Na Plataforma Moodle, o aluno dispõe das vídeo-aulas, material didático, guias, e as distintas redes de comunicação com Professor e Tutor à distância, assim configurando as ações do aluno em rede. Mas, esse território virtual de ensino possibilita o encontro presencial, no qual o aluno é acompanhado pelo Professor, o Tutor é à distância, que acaba sendo mediador e orientador das atividades na Plataforma e no polo. Nesse sentido, o relatório digital do PROFMAT 2017 sinaliza que a oferta da formação de Professores de Matemática na EaD enfrenta adversidades, reveses e diversos desafios relacionados a sociedade informacional. Vale destacar que essa oferta do curso está sujeita a exclusão de outros extratos sociais, a completa retração e restrição de vagas de demanda social conforme comunicado PROFMAT Nº 01/2019 de que as vagas para o processo de seleção PROFMAT/2020 são exclusivas para docentes do ensino básico das redes públicas, devido a uma nova interpretação da Portaria CAPES Nº209 de 21 de outubro de 2011. Assim, os alunos do PROFMAT, que até o presente momento são na maioria professores do ensino básico, e que devem se tornar exclusivos do ensino básico das redes públicas, e cuja formação educacional e exercício laboral são alicerçados pela modalidade presencial. Nesse sentido, compreende-se que o seu processo histórico, memória, e formas de aprendizado seguem referências pedagógicas no contato físico, e direto aluno-professor em sala de aula. Então, o conteúdo do PROFMAT necessita desenvolver competências e habilidades na utilização e ações na EaD, para que esse professor tenha competência de transformar o seu método de aprendizagem, e acrescentar novos recursos informacionais para sala de aula e para a escola, sendo que os conteúdos oferecidos são específicos da Matemática, e a única disciplina caracterizada como Humano-Digital: Recursos Computacionais para o Ensino de Matemática é eletiva.

Contrapondo a relação dos alunos matriculados no PROFMAT-UFRRJ (2017-2019), verifica-se que os municípios de Nova Iguaçu, Rio de Janeiro e Volta Redonda, mantiveram ou ampliaram sua matrícula no polo, isso indica que houve uma divulgação, repercussão, e procura do curso pelos outros profissionais, ou seja, que há interesse pelos professores de Matemática em se capacitar no modelo EaD. Essa inserção social é relatada no Relatório Digital do PROFMAT 2017, que relata dados de um formulário respondido pelos alunos, professores e coordenadores, em que os egressos afirmam que a formação ajudou no seu desempenho profissional como maior segurança para apresentar conteúdos, habilidade para motivarem os alunos pelo conteúdo, e maior capacidade de elaboração de material didático. Outro fator relevante é que o egresso considera o curso importante no avanço da sua carreira profissional. O Relatório Digital do PROFMAT (2017, p.34) destaca: “considera-se haver uma mudança na postura e na prática da sala de aula, tendo consequentemente contribuído para a melhoria da Educação Básica, seu principal objetivo.” Para finalizar, há apenas um indicador nesse material de pertinência sócio espacial que é o aumento

do envolvimento dos egressos na preparação e motivação da participação dos alunos da Educação Básica na Olimpíada Brasileira de Matemática. De acordo com Heller (2016 [1970], p.32): "o precedente tem mais importância para o conhecimento da situação que para o conhecimento das pessoas. É um "indicador" útil para nosso comportamento, para nossa atitude." A autora elucida que as relações sociais degeneram-se conforme os sistemas funcionais da sociedade informacional geram estereótipos, vidas estereotipadas, imitação, no ofício das circunstâncias sociais de domínio, manipulação, e os comportamentos configuram-se em papéis cerceando a individualidade.

2 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A observação das informações relativas ao PROFMAT, correlacionadas a demanda sobre sua institucionalização no ambiente do polo da UFRRJ, apresenta indicativos para buscar entender o uso da modalidade EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática do ensino básico. Não há dúvidas que a modalidade EaD se tornou, no âmbito educacional, uma modalidade de ensino substancial e permanente, que é fomentada pela sociedade informacional capitalista. Tal condição assente significância porque exige práticas pedagógicas mais avançadas e em conformidade com a vida cotidiana midiática, tecnológica e em rede atual. Entretanto, a oferta dessa formação de Mestrado e a inserção social desses professores de Matemática na Universidade revelam desigualdades sócio espaciais. Apesar da conexão em rede de distintos municípios, a hierarquização e sistematização do EaD cerceia a prática pedagógica; a escolha e determinação dos conteúdos a serem apresentados pelos Tutores a distância impede a autonomia de preparação pedagógica, e a falta de exigência da formação em Tutores em EaD para os professores do PROFMAT dificulta a função de mediador na Plataforma Moodle; a comunicação ser pela Plataforma Moodle limita a liberdade de expressão e o pensamento crítico dos agentes de conhecimento. De acordo com Heller(2016 [1970], p.32): "as formas necessárias da estrutura e do pensamento da vida cotidiana não devem se cristalizar em absolutos, mas têm de deixar ao indivíduo ·uma margem de movimento e possibilidades de explicitação." Em conformidade Silva (2008, p.8) elucida: "o crítico está impresso nas formas de produção e reprodução do urbano, bem como o seu produto final: um espaço posto como valor de troca [...] e o aprofundamento dos processos de segregação urbana." Esses autores explicitam que o modelo do EaD de construção colaborativa de conhecimento fomentado pelo capitalismo neoliberal elabora conhecimentos que não se propõem a esclarecer a prática da vida cotidiana, nem são capazes de responder a complexidade humana.

A geografia que está sendo delineada e tecida por meio do ordenamento territorial virtual representa um desafio para esse estudo do PROFMAT, os dados do polo presencial da UFRRJ sugerem como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas.

Quanto à promoção de ciência, tecnologia, técnica, conteúdo, e informação, há a ausência de uma definição da CAPES do conceito de inovação que deve ser utilizado, ainda assim, a rede dinamiza esse território virtual e conecta os agentes de conhecimento. Nessa acepção, o polo presencial da UFRRJ equivale à zona de conexão entre os fluxos de informação e agentes de conhecimento que utilizam a rede de comunicação do PROFMAT. O ponto de partida para a formação do ordenamento territorial virtual se esboça na articulação desses centros urbanos, que arquitetam suas relações e contatos através da rede, essas configuram formas e sistemas sócio espaciais, autossuficiente da dimensão física e alcance do local, ignorando o modelo tradicional capitalista de urbanização. Nessa cinesia de ordenamento territorial virtual sobrevém a ressignificação das concepções de próximo e distante, e toda a topologia da rede é fechada, é tecida na área de interação entre conteúdo-rede, zona-conexão e virtualização-plataforma, que edifica uma teia de articulações da contemporânea sociedade informacional. Em conformidade com Lukács (2003, p.216): "surge uma sistematização racional de todas as regulamentações jurídicas da vida, sistematização que representa pelo menos em sua tendência, um sistema fechado e que pode se relacionar com todos os casos possíveis e imagináveis." O autor explica que o modelo EaD de aprendizagem colaborativa, como território virtual é um sistema fechado que ojeriza e produz um abismo para ação do pensamento crítico, do reflexivo, do que reproduz a vida cotidiana, do familiar, do habitual, do ordinário, dos que são desconsiderados cientificamente, ou tecnicamente, ou ideologicamente.

Para perfazer esse estudo, a formação dos professores de Matemática necessita repensar a formação para o trabalho em educação. Simplesmente, porque analisando o relatório digital do PROFMAT 2017, há apenas um indicador sócio espacial destacado que é o aumento da participação dos alunos do ensino básico na Olimpíada Brasileira de Matemática. Apesar do relatório possuir um capítulo denominado "Inserção social", não está claro de que se trata nem qual extrato social alcança e transforma, pois não há uma definição de que e qual inserção social tanto da SBM, como do IMPA, como do CNPq, como da CAPES. O território virtual de rede de comunicação é baseado pela conexão e interação, e nessas condições não há dados que esclareçam como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores. Aprendizagem se constrói absolutamente por meio do diálogo, do debate, da comunicação, e a formação para o trabalho não deve dominar as vozes, as elocuções, as reflexões, o território virtual para a prática pedagógica não deve ser um sistema fechado, hierarquizado, é necessário para a educação, para o trabalho, para vida cotidiana a autonomia. Em concordância com Barthes (1977, p.9): "quanto mais livre for esse ensino, tanto mais será necessário indagar-se sob que condições e segundo que operações o discurso pode despojar-se de todo desejo de agarrar." Diante desse panorama, é crucial para a sociedade informacional uma tomada de atitude, a prática pedagógica não pode constituir como ameaça para a sociedade, é vital para função e exercício de professorar o

reconhecimento dessas conjunturas, é imprescindível que a educação no território virtual quer seja no espaço da universidade, quer seja no espaço da escola pública seja oportuna, propícia e favorável para a reflexão sobre os planos, programas e concepções sociais que pretenda edificar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por esse trabalho.

Agradeço a assistência, a fundamentação e a inspiração recebida pela Pós-graduação em Geografia, a toda equipe, aos meus caros colegas, especialmente a organização, atenção e o zelo dos Coordenadores Clézio dos Santos e Márcio Rufino.

Agradeço o apoio recebido pelo grupo de Iniciação Científica: Educação e Mundo Contemporâneo (UFRRJ), a todas as discussões e questionamentos que fizeram parte da nossa amizade, e o respeito e admiração que tenho por cada um de vocês colegas. Estendo esses agradecimentos a Professora Lúcia Sartório e ao meu orientador Professor Márcio Rufino pela direção, pelas orientações, pela presença a cada momento desse trabalho e o inestimável apoio intelectual.

Agradeço a contribuição material da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) que ofereceu esse projeto, a CAPES, a FAPERJ, ao CNPq, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), a Universidade Federal Fluminense (UFF), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Fundação CECIERJ (CEDERJ).

Agradeço à ajuda recebida, na pesquisa bibliográfica, dos professores Giuseppe Cocco e Sarita Albagli do PPGCI/IBICT-UFRJ, ao Bruno Tarin, a todos os colegas, ao IBCT, ao LIINC e ao PPGCI. A compreensão, generosidade e a atenção do Professor Orlando Pereira, da Professora Aline Barbosa, e da Professora Rosane de Oliveira, e a toda equipe do DEMAT da UFRRJ.

Agradeço a cada um dos meus professores que ao longo da minha vida foram pacientes comigo e por me educarem. Acrescento a cada um dos meus amigos, aos colegas, aos funcionários e a todos que de alguma forma me ajudaram em algum momento.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Célia e ao meu pai Daniel por serem minhas raízes, as minhas irmãs Daniela e Diane por me incentivarem sempre, aos meus sobrinhos Maria Clara e João Vitor por me cativarem tanto amor, tenho muito orgulho de ser sua tia Dedé. Aos meus cunhados Anderson e Alex por me ajudarem incondicionalmente. A Rosana e ao Ubiraci por cuidarem de mim e das minhas irmãs com zelo e amor. Aos amigos Valfredo e Isabel por toda a atenção e carinho. E a todos os meus familiares, os meus amigos familiares, e a minha comunidade neocatecumenal pela cooperação.

Agradeço ao meu marido Ivan por me apoiar de forma extraordinária, por todos os seus questionamentos desse trabalho, por ser um grande professor, por quem tenho profunda admiração pelo seu trabalho de excelência e seu amor ao magistério. Acrescento ao meu filho Daniel que torna o meu dia feliz por acordar sorrindo todos os dias.

Muito obrigada!

REFERÊNCIAS

BAITZ, Ricardo. Implicação: um novo sedimento a se explorar na Geografia? In: Boletim Paulista de Geografia, nº 84, jul. 2016, pp. 25-50.

BARTHES, Roland. Aula. 15ª ed. São Paulo: Cultrix (2007 [1978]).

DAMIANI, Amélia Luísa (coord.) et. al. O futuro do trabalho : elementos para a discussão das taxas de maisvalia e de lucro. São Paulo: AGB/SP. Labur/Programa de Pós-Graduação em Geografia Humana, Departamento de Geografia, FFLCH/USP, 2006. 72 p.

CAPÍTULO 6

USANDO TEORIA DE CONJUNTOS PARA VISUALIZAR A MODELAGEM ORIENTADA A OBJETOS COM CONCEITOS CONCRETOS, ABSTRATOS E IMAGINÁRIOS

Data de aceite: 01/03/2021

Ana Emilia de Meo Queiroz
Universidade Federal do Vale do São Francisco

RESUMO: Este estudo foi delineado para apresentar o uso de elementos da teoria de conjuntos no ensino do design de software sob o paradigma orientado a objetos(OO) no qual estão presentes conceitos de classe, pacotes, objetos e relações entre esses conceitos. Para tanto, (05) cinco projetos com temas livres envolvendo elementos(abstratos, concretos e imaginários) foram acompanhados durante o tempo de um mês e meio. Elementos da teoria de conjuntos serviram para visualizar a modelagem tanto na perspectiva estática (quantidade de conceitos, relacionamentos entre conceitos entre ou inter pacotes) quanto na perspectiva dinâmica (objetos na memória do computador). Resultados mostraram que houve um incremento tanto na presença quanto na frequência de conceitos. Tais resultados orientam em atividades de ensino de modelagem OO, bem como na criação de uma ferramenta para visualização de dados, (gráficos de barra, por exemplo) para modelagem OO apoiada em elementos da teoria de conjuntos.
PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática, teoria de conjunto, programação orientada a objeto.

1 I INTRODUÇÃO

Na programação orientada a objetos (OO), os modelos são construídos baseados em um mundo composto por objetos autónomos, capazes de modificar a si mesmos. O termo Paradigma orientado a objetos (POO) foi formalmente definido por [4] e suas bases repousam nos estudos sobre cognição[4,5]. Além disso, a programação orientada a objetos (OO) tornou-se, nos últimos anos, o mais influente paradigma de programação, sendo amplamente utilizado na educação e na indústria[5]. Em razão disso, quase todas as universidades ensinam orientação a objetos em algum ponto do currículo.

A programação (OO) é usado para expressar, analisar e modular, de maneira realista elementos e relacionamentos presentes do mundo observado, seja esse real ou imaginário[4,5,7]. Sendo assim, projetistas constroem diagramas em UML[1] para retratar elementos e relacionamentos do mundo observado, bem como suas cardinalidades. Entretanto segundo[3,7], a construção de modelos OO fica dependente de projetistas experientes e, por esse motivo, a autora [7] defende que elementos da teoria de conjuntos possam ser usados para visualização e monitorar modelagens OO, possibilitando ao projetista inexperiente, acompanhar, por meio

1. UML ou (Unified Modeling Language) notação usada para representar modelos em OO.

de métricas e indicadores, o percurso realizado passando de conceitos já vivenciados para novos domínios a explorar[3,7].

Na modelagem, a matemática não é apenas uma linguagem, mas um sistema de conhecimento por meio do qual fenómenos serão, inicialmente, observados, visualizados, descobertos, compreendidos e, posteriormente, explicados[1,2,8]. A teoria de conjuntos engloba propriedades e relações presentes tanto na estrutura estática quanto na estrutura dinâmica da tecnologia de objetos[6,7]. Na perspectiva estática, são observados: quantidade de elementos e suas relações. Na perspectiva dinâmica, é vista a quantidade de objetos em memória RAM[2]. A seguir algumas definições presente em [7].

Módulo. *Seja M um conjunto de pacotes.*

$$M = \{p0, p1, p3,...pn) \quad (1)$$

Pacote. *Seja P um pacote em M*

$$P = \{c1, c2, c3,...cn) \quad (2)$$

Classe. *Seja C uma classe em P. Em modelagem orientada a objetos, uma classe é uma abstração de entidades existentes no domínio do sistema de software.*

$$C= \{o1, o2, o3,...cn) \quad (3)$$

Objetos. *Seja C uma classe. Oi e um objeto do tipo da classe*

Tipo abstrato de dado. *Um tipo abstrato de dados (TAD ou ADT abstract data type) define uma classe de objetos composto pela dupla (V ,O). Send V conjunto de valores e O conjunto de operações sobre os valores.*

$$TAD = (V, O) \quad (4)$$

Método. *Seja uma classe C definida como em (4). A classe cachorro tem o método latir.*

$$O = \{OP1, OP2OP3, ,CN\} \quad (5)$$

op*i* corresponde a uma operação e a um método dentro da classe.

Método abstrato. *apresenta somente a assinatura do método[3], sem dizer como o serviço será operacionalizado.*

Classe abstrata. *É aquela que apresentam pelo menos um método abstrato*.

Interface. *Tipo de classe que apresenta todos os métodos abstratos.*

Atributo. *São os valores pertencentes ao conjunto V em (4). Por exemplo, o atributo nome da classe Pessoa.*

---

2. A memória RAM (Random Access Memory) armazena dados de programas em tempo de execução.
3. Valores que são retornados, nome do método e parâmetros

Aplicando relações em conjuntos para relações entre classes. Se S e T são dois conjuntos em que S = {a, b, c} e T = {d, e, f}, então o Produto cartesiano entre S, T é dado por:

$$S \times T = \{(a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f)\} \quad (6)$$

Herança*. Ou generalização. Mamífero é superclasse de Humano. Ou seja, todo Humano é Mamífero. Herança é vista como relação entre classes.*

$$RI = \{(ci, cj) | \ ci \in P, cj \in P, ci \text{ herda } cj \} \quad (7)$$

E apresenta a propriedade de transitividade.

$$(c1, c2) \in R \text{ and } (c2, c3) \in R \ (c1, c3) \in R \quad (8)$$

Associação*. É o mecanismo pelo qual um objeto utiliza os recursos de outro, tornando-o enriquecido de serviços. Uma classe possui um atributo denominado de "impressora", que é responsável por oferecer o serviço de impressão.*

E é simétrica.

$$RAS = \{(ci, cj) | \ ci \in P, cj \in P, ci \text{ Associa } cj \} \ \in R \quad (9)$$

Para os pares ordenados (x, y) de S X T, a relação R mantém verdadeiro para x R y = y R x, então a relação R é simétrica em natureza.

$$(\forall x, y) \{(x, y \in R)\} -> \{(y, x) \in R \} \quad (10)$$

E reflexiva

$$(\forall x, y) \{(x \in S)\} -> \{(y, x) \in R \} \quad (11)$$

Agregação*. Representa relacionamento do tipo 'parte todo' entre classes.. Os dados e serviços comumente usados, são definidos em uma classe separada. Por esse motivo, agregar reduz o tamanho da classe e, por conseguinte, a complexidade do design.*

$$RAG = \{(ci, cj) | \ ci \in P, cj \in P, ci \text{ Agrega } cj \} \quad (12)$$

À luz dessas definições, posicionamos este trabalho nas iniciativas voltadas explorar estratégias de ensino de modelagem OO evidenciando, num contexto instrucional, a integração de conhecimentos existentes entre teoria de conjuntos e programação orientada a objetos[6,7]. Sendo assim, fazemos as seguintes perguntas: como ocorreu a modelagem com e sem a visualização proposta por [7]? Houve diferença nas quantidades de elementos (perspectiva estática(pacote, classes, classes abstratas, interfaces) e dinâmica(objetos))

com e sem a visualização? Houve diferenças quantitativas para conceitos abstratos, concretos e imaginários?

O objetivo deste trabalho foi, portanto, visualizar a modelagem de projetos OO com projetistas inexperientes usando teoria de conjunto. Sua principal contribuição foi evidenciar que a visualização com teoria de conjuntos amplia a percepção sobre conceitos presentes em OO. Além disso, resultados mostram que houve distinções nas quantidades quanto aos tipos de conceitos: concretos, abstratos e imaginários.

2 | DESENVOLVIMENTO

Cinco (05) projetos com temas heterogêneos sobre games, banco on-line, casa inteligente, equipadora de veículos e matemática, abrigando conceitos concretos como (casa, quarto, cozinha), abstratos(número racional, soma, multiplicação, equação) e imaginários(personagem, herói, bruxa) foram modelados com o *NetBeans*[4] e acompanhados durante o tempo de um mês e meio. A Figura 1 mostra como ocorreu o modelagem para cada projeto.
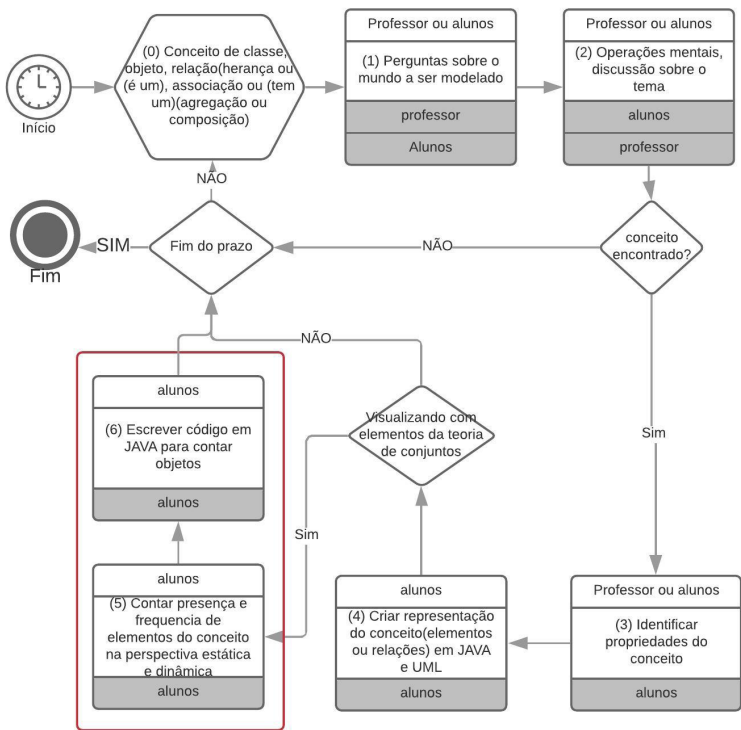
Figura 1. Modelagem

Fonte: Autor

4. NetBeans – ambiente para o desenvolvimento de software com uma fonte aberta.

Na tarefa (02) dois da Figura 1, se um novo conceito fosse identificado então, na tarefa (3) três, suas propriedades eram identificadas. Em seguida, na tarefa (04) quatro, uma representação (diagrama em UML ou classe num arquivo em linguagem JAVA[5]) era criada. Caso não fosse identificado nenhum conceito, o ciclo voltava para a tarefa (0). Em todos os casos, o prazo foi considerado como critério de parada. A seguir, Tabela 1 na aparecem as quantidades sem visualização.

PE									**PD**
ID	C	CA	I	R (H ou A)	PS	PO	P	Con	O
P0	*05*	*NI*	*NI*	*3*	*NI*	*NI*	*NI*	*C*	*NI*
P1	*05*	*NI*	*NI*	*NI*	*NI*	*NI*	*NI*	*A*	*NI*
P2	*08*	*NI*	*NI*	*6*	*NI*	*NI*	*NI*	*C*	*NI*
P3	*10*	*NI*	*NI*	*2*	*NI*	*NI*	*NI*	*C*	*NI*
P4	*15*	*NI*	*NI*	*2*	*NI*	*NI*	*NI*	*I*	*NI*

Tabela 1. Presença e frequência de conceitos sem visualização**.** Legenda: PE: Perspectiva Estática, PD: Perspectiva Dinâmica, ID: Identificação do projeto, C: Classes, CA: Classes Abstratas, I: Interfaces, R: Relacionamentos(herança e associação), O: Objetos. NI: Não Identificado. P: Pacotes, PO: Polimorfismo de *overload*[6]. PS: Polimorfismo de subtipo[7]. Legenda: P: Projeto, Con: Conceitos, C: Concreto, A: Abstrato, I: Imaginário.

Fonte: Autor

Nas colunas da **Tabela 1** foram colocados os conceitos, nas linhas, os projetos. Vê-se que há muitos conceitos não identificados. Tendo em vista a ausência desses conceitos, cada grupo recebeu orientações escritas com as definidas em (1-12). Com essas orientações, os projetos passaram a executar o ciclo completo da Figura 1 acrescentadas as tarefas (5) cinco e (6) seis. Na tarefa (6) seis foram escritos comandos JAVA para possibilitar a contagem. A seguir a **Tabela 2**, mostra as novas quantidades.

PE									**PD**
ID	C	CA	I	R (H ou A)	PS	PO	P	Con	O
P4	*61*	*5*	*5*	*41*	*6*	*6*	*7*	*I*	*0*
P3	*27*	*3*	*3*	*2*	*41*	*1*	*8*	*C*	*40*
P2	*17*	*1*	*1*	*6*	*NI*	*NI*	*9*	*C*	*NI*

5. JAVA é uma linguagem de programação com paradigma OO.
6. Polimorfismo de *overload* ocorre na mesma classe
7. Polimorfismo de subtipo ocorre entre classes diferentes (no mesmo pacote ou não) numa relação herança.

P0	*16*	*1*	*1*	*2*	*10*	*1*	*2*	*C*	*NI*
P1	*10*	*1*	*1*	*1*	*NI*	*NI*	*0*	*A*	*NI*

Tabela 2. Preseneça e frequência de conceitos depois da visualização. Legenda: PE: Perspectiva Estática, PD: Perspectiva Dinâmica, ID: Identificação do projeto, C: Classe, CA: Classe Abstrata, I: Interfaces, R: Relacionamentos(herança e associação), O: Objetos. NI: Não Identificado, P: Pacotes, PO: Polimorfismo [8]de *overload*. PS: Polimorfismo de subtipo. Legenda: P: Projeto, Con: Conceitos. C: Concreto, A: Abstrato, I: Imaginário.

Fonte: Autor

Na **Tabela 2**, ordenada pela frequência do conceito de classe, vê-se que para todos os projetos houve incremento tanto na presença quanto na frequência do conceito. A presença de pacotes indica que houve maior divisão do mundo cujos conceitos foram agrupados por algum critério de similaridade. Entretanto para os projetos P1 e P4 com conceitos abstratos e imaginários, respectivamente. Vê-se que nesses apareceram quantidades mais discrepantes, P1 com (10) dez classes e P4 com (61) sessenta e uma classes. Isso sugere que a modelagem OO é, potencialmente, diferente entre conceitos concretos, abstratos e imaginários.

3 | DISCUSSÃO

3.1 Perspectiva estátiva versus dinâmica

A visualização estática de classe e relações entre classes (Coesão) e também entre as classes/pacotes (Acoplamento) possibilitou perceber desequilíbrios de subcategorização. Por exemplo, na **Tabela 1** não aparecem pacotes, já na **Tabela 2** aparecem. Isso sugere que visualizar o processo possibilitou serem percebidas subcategorias de conceitos com base tanto na variabilidade de objetos quanto na distribuição de conceitos entre pacotes. Esses resultados se coadunam com[7] pois explicitou a coesão e o acoplamento.

Na **Tabela 2,** vê-se que**,** além do conceito de objetos, há a presença dos conceitos de PO (polimorfismo de *overload* ou sobrecarga) e PS (polimorfismo de subtipo), entretanto aspectos qualitativos desta presença são melhor visualizado na perspectiva dinâmica. Com a visualização quantitativa, os conceitos de PO e PS passaram a integrar os conceitos visualizados, possibilitando, assim, a passagem de conceitos já vivenciados para novos domínios a explorar[7,5].

Tanto na perspectiva estática quanto dinâmica houve incremento de conceitos, sejam esses, classes, objeto ou relações. Entretanto depois da tarefa (05) cinco, presente na Figura 1, deve ser executada a tarefa (6) na qual comandos foram escritos, especificamente, para contagem de objetos. A visualização dinâmica, portanto, possibilitou acompanhar e prevê

8. Polimorfismo permite que, em tempo de execução o programa tenha seu comportamento modificado.

o uso de memória RAM no projeto final. Esses resultado se coadunam com[7]; entretanto, viu-se, além disso, que a contagem ampliou o uso de conceitos sobre modelagem OO, uma vez que na tarefa (6) foi necessário o uso do conceito de campo e método *static*[9].

3.2 Identificação de erros de modelagem

Durante a execução das tarefas (5) e (6) da Figura 1, a maioria dos grupos estiveram ausentes. Logo, os números da **Tabela 2** junto às ausências comprovadas dos integrantes, nos permite dizer que a visualização colaborou na realização da modelagem sem a ajuda de um projetista experiente. Por exemplo, durante a apresentação do projeto P3, um de seus integrantes disse que quando comparou as quantidades de classes em cada pacote, percebeu que havia um pacote com apenas uma (01) classe, fazendo-o refletir sobre a possibilidade de esse fato ser decorrente de um erro de modelagem. Ou seja, a visualização proposta por [7] lançou luz sobre potenciais problemas de modelagem, ampliando a percepção de projetistas sobre o processo .

3.3 Conceitos concretos, abstratos e imaginários.

Vê-se que, da Tabela 1 para **Tabela 2,** P1(conceitos abstratos) houve um incremento de (05) conceitos, enquanto que P4(conceitos imaginários), (46) quarenta e seis. Ou seja, neste estudo, a visualização mostrou que a modelagem foi distinta entre conceitos: abstratos, concretos e imaginários.

4 I CONCLUSÃO

Para (05) cinco projetos com conceitos abstratos, imaginários e concretos, foram apresentados resultados que corroboram os efeitos da visualização com teoria de conjuntos na modelagem OO. Além disso, viu-se que visualizar a modelagem OO incrementou tanto a presença quanto a frequência de elementos do conceito. A principal contribuição deste trabalho foi, portanto, mostrar que o uso da visualização proposta por[7] ampliou a percepção sobre conceitos. Evidenciando, além disso, potenciais distinções na modelagem envolvendo conceitos concretos, abstratos ou imaginários. Como trabalho futuro, no âmbito de um projeto de iniciação tecnológica, será desenvolvida uma ferramenta para visualizar modelagens OO, contribuindo, assim, para apoiar atividades de modelagem com projetistas inexperientes ou não.

REFERÊNCIAS

1. GOLDIN, Gerald A.; KAPUT, James J. A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. **Theories of mathematical learning**, v. 397, 1996.

2. HATANO, Giyoo. (1997). Commentary: Cost and Benefit of Modelling Activity. **Learning and Instruction**, 7(4), 383–387.

9. Static. Palavra reservada que faz o campo ou método pertencer à classe e não a suas instâncias(objetos).

3. HUIZING, Cornelis et al. Visualization of Object-oriented (Java) Programs. In: CSEDU (1). 2012. p. 65-72.

4. KAY, Alan. Dr. alan kay on the meaning of" object-oriented programming", 2003. 2015.

5. KÖLLING, Michael. The problem of teaching object-oriented programming, Part 1: Languages. **Journal of Object-oriented programming**, v. 11, n. 8, p. 8-15, 1999.

6. MOEZ A. AbdelGawad. **NOOP: A mathematical model of object-oriented programming**. 2012. Tese de Doutorado. Rice University.

7. POORNIMA, U. S.; SUMA, V. Visualization of object oriented modeling from the perspective of set theory. **Lecture Notes on Software Engineering**, v. 1, n. 3, p. 214, 2013.

8. VERGNAUD, Gérard. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p. 167-181, 1998.

CAPÍTULO 7

GEOGEBRA: MATEMÁTICA NA PALMA DA MÃO

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Paulo Ricardo Rocha Lima
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)
Parnaíba - Piauí
https://orcid.org/0000-0001-9771-6539

Joycilene Lopes de Brito
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)
Parnaíba - Piauí
https://orcid.org/0000-0001-9256-1582

Ricardo de Oliveira Mendes
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)
Parnaíba - Piauí
http://lattes.cnpq.br/4212323124410434

Francisco Vitor Vieira de Araujo
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)
Parnaíba - Piauí
https://orcid.org/0000-0002-6555-3170

Dalila Sara Silva Gomes
Unidade Escolar Edson da Paz Cunha
Parnaíba - Piauí
https://orcid.org/0000-0003-2074-5424

RESUMO: Trata-se de um relato de experiência sobre a aplicação de atividades de exploração do software Geogebra em cinco turmas do Ensino Médio na Unidade Escolar Edson da Paz Cunha. Fazendo uso dos próprios smartphones dos alunos, foram feitas experiências sobre gráficos, funções e trigonometria. Em geral, os alunos tiveram facilidade em explorar o aplicativo, demonstraram maior interesse nas explicações e demonstravam compreender o assunto com maior facilidade.
PALAVRAS-CHAVE: Tecnologias Digitais, Geogebra, Matemática.

GEOGEBRA: MATH IN THE PALM OF THE HAND

ABSTRACT: This paper describes an experience report on the application of exploration activities using the Geogebra software in five high school classes in Edson da Paz Cunha, a School Unit. Using the students' own smartphones, experiments were performed about graphs, functions and trigonometry. In general, students found it easy to explore the application, showed greater interest in explanations and demonstrated understanding the subject more easily.
KEYWORDS: Digital Technology, Geogebra. Math

1 | INTRODUÇÃO

É notável a forte presença da tecnologia em nossa rotina, especialmente no uso de celulares de alta tecnologia, os *smartphones*. Sendo um dos principais objetos de consumo, o equipamento é poderoso e versátil. Permite, por exemplo, definir rotas por orientações baseadas em GPS; solicitar serviços de táxi, comida ou pagamentos sem uso de dinheiro ou cartão;

produzir textos, fotos, vídeos. Nossas vidas são condicionadas às tecnologias que nos são contemporâneas.

No entanto, em sala de aula as tecnologias digitais não são utilizadas com a mesma frequência que a usamos no dia-dia. Na verdade, seu uso nas salas de aula sofre forte resistência, sendo proibida a simples presença do aparelho em sala em muitas escolas. Um equipamento tão poderoso e versátil como este não poderia auxiliar no processo de construção do conhecimento? Em particular, é possível o desenvolvimento do conhecimento matemático em sala de aula por meio desses recursos tecnológicos?

O presente trabalho é um relato de nossas experiências com atividades desenvolvidas no âmbito do Programa Institucional de Iniciação à Docência da Universidade Federal do Piauí fazendo uso de um aplicativo voltado para o ensino de matemática, o Geogebra. As atividades foram desenvolvidas com o auxílio dos *smartphones* dos alunos e os nossos.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A influência tecnológica é profunda dentro do comportamento humano, seja individual ou coletivo. Hoje não é necessário digitar perfeitamente como datilógrafos, mas lidar com computadores é essencial em diversas áreas de trabalho. O rádio perdeu espaço para a TV que perdeu espaço para a Internet. Gradualmente, conceitos sofrem mudanças, assim, afirma Kenski (2003, p. 32) que a noção do que é ciência e conhecimento sofrem alterações pelo impacto tecnológico. A mesma autora ainda faz uma observação mais geral e profunda: o momento tecnológico influencia no redimensionamento de nossas compreensões e formas de viver.

Ao se falar em educação, no desenvolvimento do conhecimento entre indivíduos, mesmo em seus primórdios, já se notava algum tipo de tecnologia presente. Seja na antiga Babilônia com suas tábuas de argila ou nos lápis, lousas, cadernos, todos são recursos que fazem parte do modo de pensar e aprender. De alguma forma, a humanidade sempre buscou ampliar suas capacidades motoras e cognitivas.

No caso da matemática, há muito tempo existem equipamentos para realizar cálculos, eles estão presentes em todos os ambientes: bancos, farmácias, supermercados etc. Um exemplo clássico é a simples calculadora eletrônica, usada no comércio e, por incrível que pareça, pouco presente em sala de aula. Além do mais, a execução de algoritmos, fórmulas e outros procedimentos demasiadamente mecânicos tornam-se obsoletos e contraprodutivos se considerarmos o quanto usamos computadores para calcular as mais diversas funções: cálculo de uma gorjeta, verificação de frequência cardíaca, análise de risco em investimentos.

Se o aluno percebe que seu celular consegue responder mais rápido e melhor um exercício matemático, seu interesse em aprender fórmulas se limita a passar em um teste, isso quando algum interesse ainda existe. O estudante terá contato com a matemática durante sua vida toda, mas raramente por meio de testes similares aos feitos na escola.

E qual matemática o aluno aprende? A matemática do professor não é a mesma do matemático e não será a mesma que o aluno irá interpretar. Esse processo de adaptação do objeto científico para um objeto de ensino, chamado por Yves Chevallard como Transposição Didática, com o intermédio de tecnologias digitais, pode tornar o conhecimento científico mais compreensível para os alunos (ABAR, 2020).

As tecnologias, em especial as digitais, já tão presentes em outros ambientes, quando inseridas no contexto escolar tem capacidade de tornar obsoleto ou sem sentido o foco que é dado ao ensino na atualidade. Com um equipamento com capacidade de cálculo extraordinário nas mãos, ainda insistimos em ensinar técnicas de cálculo que só fazem sentido em exercícios específicos do livro didático? Com um equipamento desses em mãos e

> Ao apresentarem diferentes soluções passo a passo (algébricas, geométricas etc.), em representações diversas, para exercícios comumente solicitados por professores nas aulas de matemática, em qualquer nível, evidenciam que a matemática não se resume a cálculos e seu ensino pode se ocupar prioritariamente de questões mais conceituais, uma vez que os procedimentos técnicos de realização de cálculos são realizados com mais eficiência pelo computador. (MALTEMPI e MENDES, 2016, p. 90).

Na própria Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) considera-se que o aprendizado matemático deve focar na compreensão de conceitos e procedimentos. Todo ou quase todo do “processo bruto” de qualquer demanda será computado de alguma forma por algum tipo de tecnologia digital, tecnologia que muda frequentemente, mas que geralmente mantém os mesmo conceitos matemáticos na sua essência. Por conseguinte, o aprender a aprender é a chave na relação com as tecnologias, assim o ensino da matemática deve focar em fazer o aluno pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias e ter autonomia de pensamento (KUHN, 2020), pois é isso que ele continuará fazendo durante o resto de sua vida.

3 I METODOLOGIA

Em nossos trabalhos no Programa de Iniciação à Docência (PIBID), promovidos pela Universidade Federal do Piauí, tivemos a oportunidade de experienciar o uso de tecnologias do ensino em sala de aula. Em especial, na Unidade Escolar Edson da Paz Cunha em Parnaíba-PI, junto aos professores de matemática das turmas de primeiro e segundo ano experimentamos a capacidade do Geogebra, um aplicativo de ensino de matemática.

Em três turmas do primeiro e duas turmas do segundo ano do Ensino Médio promovemos atividades no qual o Geogebra apresentava potencial capacidade de demonstrar relações matemáticas com fidelidade considerável. As turmas de primeiro ano estudavam funções lineares e as turmas de segundo ano, trigonometria. Optamos pelo

Geogebra por ser uma ferramenta educacional testada em outros estudos, e como diz no próprio site oficial:

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. (disponível em https://www.geogebra.org/about).

O Geogebra está disponível em diversas plataformas, mas pela facilidade de manuseio e presença natural no ambiente escolar, focamos no uso do aplicativo Geogebra em sua versão para *smartphone*, visto que quase todos os alunos possuíam um aparelho com essa tecnologia. Foram realizadas atividades de familiarização com o aplicativo, resolução de exercícios, exploração e exposição de conceitos matemáticos, tudo no celular. Por meio do aplicativo, elementos matemáticos difíceis de simular por meio dos recursos convencionais eram criados pelos próprios alunos sem grandes dificuldades. De forma dinâmica e ativa, incentivamos os alunos a perceberem por meio do aplicativo as relações entre funções e seus gráficos (turmas do primeiro ano) e as relações trigonométricas no triângulo retângulo e no círculo unitário (turmas do segundo ano).

4 I DISCUSSÃO E RESULTADOS

Durante as aulas com o aplicativo destacamos a participação, interesse e satisfação por parte dos alunos que pouco participavam das aulas convencionais. Enquanto alunos mais habituados com a manipulação matemática faziam comparações entre seus cálculos nos cadernos e o que obtinham nas telas. Os alunos também descobriram recursos e dificilmente necessitavam de uma segunda explicação de como utilizar uma ferramenta.

Logo na primeira aula de introdução da ferramenta, os alunos não tinham grandes dificuldades em compreender o funcionamento do aplicativo. Quando apresentamos, por exemplo, a função de criar um ponto no plano cartesiano, alguns alunos já descobriam como personalizar aquele ponto com cores e tamanhos. Fazer uma animação para que o ponto se locomovesse conforme uma função e deixasse um “rastro no seu caminho” era facilmente associado com a ideia de gráficos.

Ainda é relevante observar que houve turmas inteiras no qual o número de alunos com o aplicativo era insuficiente para atividades. Entretanto, conseguíamos fazer demonstrações de conceitos trigonométricos em nossos celulares e convidávamos aqueles com o aplicativo a usá-lo para elucidar suas dúvidas. No momento que nos chamavam devido a uma dúvida no exercício do livro, tínhamos a oportunidade de apresentar os conceitos mais básicos da trigonometria e desenvolvê-los até onde a questão solicitava de

forma ágil e com bastante atenção do aluno que demonstrava compreender o que estava sendo demonstrado na tela do celular.

Não notamos o uso do aparelho para outras atividades na maioria dos participantes, mas, de fato, alguns alunos aproveitaram o momento para se distrair com o celular, atitude similar ao que já faziam em outras aulas. A diferença maior estava nos alunos que normalmente não participam das aulas, eles questionavam mais e lembravam de conceitos na outra aula. Eles estavam mais dispostos a interagir com o assunto e com a turma.

Mesmo em aulas mais tradicionais, o Geogebra continuou presente em diversos momentos para exemplificar de forma rápida e dinâmica relações matemáticas. Alguns alunos mantiveram o aplicativo instalado e o utilizavam como ferramenta de estudo. Especialmente nas turmas onde os alunos foram mais participativos, notamos uma melhoria na compreensão e construção dos conceitos matemáticos. A própria abordagem do plano cartesiano no quadro branco durante as aulas expositivas sofreu influência da experiência: quando os alunos faziam comparações entre o que estava acontecendo na lousa e o que estaria acontecendo no aplicativo Geogebra.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao trabalharmos com cinco turmas percebemos o quanto o perfil da sala pode influenciar na efetividade de uma proposta de ensino. As turmas de segundo ano não consideraram válido o uso do Geogebra por diversos motivos, incluindo a necessidade de fazerem exames tradicionais nos quais o uso de recursos tecnológicos são proibidos. Ainda assim, percebíamos uma compreensão de conceitos matemáticos mais natural por parte dos alunos daquelas turmas ao interagirem com o Geogebra, pois não havia a necessidade de imaginar uma parte do processo, tudo estava visível na tela.

Evidente que o aplicativo sozinho não é suficiente para o entendimento dos conceitos matemáticos. Precisávamos dialogar com as turmas para explicar as relações matemáticas que estavam acontecendo na tela do celular. O diferencial estava na possibilidade de explorar ideias com os alunos e testar a validade delas facilmente.

Nas telas dos celulares, as relações matemáticas ganhavam forma, significado e estavam sujeitas à fácil manipulação dos alunos. Tudo possível graças a um aparelho já presente na nossa rotina. Dessa forma, consideramos uma experiência significativa tanto para nós enquanto futuros docentes, como para os alunos.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina A. A. P. **A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio. Acesso em: 29 dez. 2020.

KENSKI, Vani Moreira. **Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância**. Campinas: Papirus, 2003.

KUHN, M. C. **Dificuldades de Aprendizagem em Matemática: percepções de professores do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio Grande do Sul**. Perspectivas da Educação Matemática, v. 13, n. 32, p. 1-22, 7 jul. 2020.

MALTEMPI, Marcus Vinicius; MENDES, Ricardo de Oliveira. **TECNOLOGIAS DIGITAIS NA SALA DE AULA: Por que não?** In: IV Congresso Internacional de TIC na Educação, 2016, Lisboa/Portugal. Anais... Lisboa/Portugal: [s.n.], 2016.

CAPÍTULO 8

APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS: ELEMENTOS ESTRUTURANTES DESSE PROCESSO

Data de aceite: 01/03/2021
Data da submissão: 08/12/2020

Maria Lídia Paula Ledoux
Universidade Federal do Pará – UFPA
Faculdade de Matemática - *Campus* Universitário de Castanhal/Pará
http://lattes.cnpq.br/1839640402319006
https:orcid.org/000-0001-59799468

Ana Claudia Oliveira Sales
Escola Pública Municipal da Prefeitura da Cidade de Tracuateua/Pará
http://lattes.cnpq.br/6633591139816210

RESUMO: Este artigo surge como resultado de uma pesquisa que se configura de natureza básica, de abordagem qualitativa descritiva, com o objetivo de *analisar para compreender as dificuldades percebidas no/do processo de aprender conceitos matemáticos básicos.* Participaram desta investigação, dez estudantes do Ensino Médio de uma instituição de ensino pública estadual, localizada no município de Tracuateua, Estado do Pará. As informações foram constituídas por meio de um roteiro de entrevistas com questões semiestruturadas. As informações foram analisadas por meio da Estatística Descritiva, que é o conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos realizados em qualquer área do conhecimento, na perspectiva de verificar a frequência das respostas. O foco desta pesquisa está centrado na seguinte problemática: De que forma os estudantes percebem suas dificuldades em aprender conceitos matemáticos básicos? A análise das informações, nos permitiu não só identificar elementos estruturantes do processo de aprender conceitos matemáticos básicos, mas, compreender de que forma esses elementos dificultam a aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades de aprendizagem, Elementos estruturantes, Conceitos básicos.

LEARNING BASIC MATHEMATICAL CONCEPTS: STRUCTURING ELEMENTS OF THIS PROCESS

ABSTRACT: This article emerges as the result of a research that is configured of basic nature, descriptive qualitative approach, with the objective of analyzing to understand the difficulties perceived in the process of learning basic mathematicalconcepts. Ten high school students from a state public education institution, located in the municipality of Tracuateua, State of Pará, participated in this investigation. The information was constituted through a script of interviews with semi-structured questions. The information was analyzed through thee-statística Descritive, which is the set of techniques that allows, in a systematic way, to organize, describe, analyze and interpret data from studies conducted in any area of knowledge, in order to verify the frequency of responses. The focus of this research is centered on the following problem: How do students perceive their difficulties in learning basic mathematical concepts? The

analysis of the information allowed us not only to identify structuring elements of the process of learning basic mathematical concepts, but to understand how these elements hinder the learning of high school students.
KEYWORDS: Learning difficulties, Structuring elements, Basic concepts.

1 | INTRODUÇÃO

Neste estudo, compreende-se a Educação, como o ato ou processo de instruir a sociedade para assegurar o desenvolvimento físico e intelectual do cidadão, considerando que é a apropriação do saber que marcará profundamente a constituição do sujeito (GADOTTI, 2008). O saber apontado pelo autor, aqui é entendido como, os conhecimentos, as informações e os conceitos que vão sendo, ao longo do tempo, construídos, elaborados e acumulados pelo homem, cabendo a este, o ato de ensinar o próprio homem.

Em se tratando de ensinar e aprender conceitos matemáticos, as dificuldades são hodiernas na comunidade escolar, pois tem desencadeado inúmeros debates acerca desta problemática, que tem motivado pesquisadores como Vitti (1999); Lacanallo; Albuquerque e Mori (2009), a fazerem discussões acerca da importância de produzir estudos a partir da escuta de professores, sobre as dificuldades na aprendizagem da Matemática, dando lugar de protagonismo das ideias do próprio educador/professor.

Em contrapartida, o protagonista deste estudo é o estudante, em que o objeto de estudo desta pesquisa, se faz da seguinte problemática: De que forma os estudantes percebem suas dificuldades em aprender conceitos matemáticos básicos? Esta problemática aponta na direção de uma possível percepção de elementos ligados a fatores emocionais, culturais e ao cognitivo dos estudantes, que estão situadas desde as limitações e/ou a não interpretação de situações matemáticas; a aversão e ao baixo desempenho na disciplina, que podem ser visto como elementos que estão inseridos no processo de aprender Matemática e, consequentemente, se refletem nos conceitos formadores do cognitivo lógico matemático.

Neste sentido, este estudo tem como principal objetivo *analisar para compreender as dificuldades percebidas no/do processo de aprender conceitos matemáticos básicos de estudantes do Ensino Médio,* na perspectiva de identificar elementos estruturantes inseridos neste processo, considerando que:

> [...] é altamente improvável que os alunos cheguem a aprender, e aprender da maneira mais significativa possível, os conhecimentos necessários ao seu desenvolvimento pessoal e a sua capacidade de compreensão da realidade e de atuação nela, que a escola tem a responsabilidade social de transmitir (ONRUBIA, 2001, p.123).

A assertiva faz referência a competência da escola que está deixando o desempenho de sua função social de lugar do aprender, transformando-se em um ambiente pouco

convidativo, provocando desmotivação e insatisfação do estudante com relação a instituição de ensino, que deveria ser o lugar em que ele queira estar, pois

> O que se deve ter claro é que a escola sempre teve como meta que os alunos fossem capazes de relacionar adequadamente várias informações, fatos, conhecimentos e habilidades para enfrentar situações-problema; no entanto, em raros momentos trabalhou-se sistematicamente para atingi-la (MIGUEL, 2002, p.376).

A esta insatisfação do estudante, soma-se a falta de compromisso com sua própria aprendizagem, atribuindo, entre outros fatores, as adversidades vivenciadas no âmbito social, a ausência da motivação e do interesse nas questões relacionadas à escola.

Estes aspectos, nos despertaram interesse em realizar este estudo, a partir das escutas em nosso ambiente de trabalho, onde ficam evidenciadas as dificuldades enfrentadas em relação a aprendizagem de conteúdos matemáticos em instituições públicas. Essas dificuldades, na maioria das vezes são justificadas pela ausência de uma base pontual no que diz respeito aos conceitos matemáticos básicos, além da insegurança em fazer uso e aplicação prática desses conteúdos no cotidiano, o que de certa forma, reforça o fracasso na aprendizagem da disciplina Matemática.

Neste sentido, Vitti (1999), sinaliza que:

> [...] o fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos (p.19).

As limitações enfrentadas pelos estudantes da Educação Básica na compreensão de conteúdos ensinados na sala de aula, geram frustação e desmotivação, o que contribuem para o fracasso decorrente desse processo. Fato este, que tem motivado professores e pesquisadores da área, a desenvolverem estudos na perspectiva de compreender esses fenômenos. Além da desmotivação, a Matemática carrega o estigma de ser uma disciplina de difícil aprendizagem. A partir desta percepção, os estudantes criam bloqueios na aprendizagem, especialmente, por não conseguirem associar os conteúdos matemáticos aprendidos na sala de aula à realidade em que está inserido.

> Os conceitos somente serão entendidos mediante sua utilização prática de análises e compreensão de problemas reais e ainda, dentro de uma cultura que tenha significado. O que a escola deixa a desejar é que o aluno aprende algo isolado, teórico, abstrato e separado dos esquemas de pensamento que regem a interpretação e a ação (GADOTTI, 2008, p.10).

Outro aspecto a ser destacado, é o que se refere ao desinteresse dos estudantes pela Matemática. Historicamente, esta falta de interesse, não é um aspecto que se vivencie apenas no contexto atual. Esta negação pela Matemática, surge a partir de afirmativas como: aprender Matemática é apenas para os ‘iluminados’; aprender Matemática é para

poucos, entre outras, que estudantes da Educação Básica, ouvem com certa frequência, o que os leva ao conformismo de que não são capazes de aprender.

Estes aspectos, podem ser vistos como elementos estruturantes que contribuem ou não para o fracasso do aprendizado de conceitos básicos, o que torna esta pesquisa relevante, haja vista que, a partir deste estudo, sejam configuradas possíveis reflexões provocadoras de mudanças, tanto no contexto investigado quanto em futuras práticas docentes.

2 I CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS: BREVES DEFINIÇÕES

A aprendizagem de conteúdos matemáticos ainda é uma questão que preocupa, não só pelas limitações estruturais do próprio sistema educacional, mas, especialmente, pelas dificuldades de compreensão de conceitos matemáticos básicos. A esse respeito, Silveira (2005), destaca que:

> [...] o conceito que o professor quer que o aluno construa será conectado com outros conceitos, de acordo com a imaginação e a memória do aluno, mas deve obedecer às necessidades e exigências da matemática. Assim, o conceito a ser construído é "escravo" do seu objeto e não pode ser modificado. Porém como o sujeito projeta sentidos seus ao objeto ele acaba transformando o conceito (p. 60).

Por conseguinte, estes conceitos básicos referentes à Matemática, são vistos por habilidades e competências em documentos oficiais, voltados a compreensão de uma linguagem universalizada que permeia os estudos matemáticos e, que Gadotti (2008), sugere que a criança deveria aprender, nas quatro séries iniciais a efetuar as operações fundamentais envolvendo números inteiros, frações e decimais, solucionar problemas concretos, assim também a familiarizar-se com as figuras geométricas, com os cálculos de comprimentos, entre outros, para que a aprendizagem em Matemática seja acentuada.

Neste sentido, Carvalho (2009), sinaliza que várias são as causas que impedem esta aproximação, uma delas, sem dúvida, é a dificuldade de compreensão da linguagem matemática, altamente dependente da concepção e capacidade de uso de seus conceitos. Para que os estudantes percebam estes preceitos, precisam dispor de uma linguagem própria, com caracteres acessíveis.

Para D'Ambrósio (1986),

> [...] temos que admitir, se não por outra razão, apenas de um ponto de vista prático, que falamos sobre a mesma Matemática por toda a parte do mundo, com a mesma notação, as mesmas definições e as mesmas teorias, com algumas exceções, no nível muito elementar. Neste nível, reconhecemos a existência de práticas matemáticas que diferem essencialmente de um grupo cultural para outro (p.57).

Para que estes conceitos façam sentido, o estudante deverá compreender que falamos em uma linha de pensamento relacionando a Matemática com essa notação acessível, no sentido de compreender que essa aceitação inicial deveria ser algo natural, pois estes elementos a princípio incompreensíveis, seriam amenizados em meio ao 'caos' e ao 'desespero' que os estudantes que se encaixam neste discurso, de recear a ciência exata como algo inacessível. Para evitar que esse conhecimento seja desvinculado e/ou isolado, é necessário que mudanças ocorram nas práticas docentes. A esse respeito Marques e Hartmann (2014), sinalizam que:

> Para mudar a didática do ensino de Matemática nas escolas tornando-a dinâmica, rica, viva, é preciso mudar antes os conceitos que se tem dessa área do conhecimento. Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas, ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado, esperando que saibam como utilizá-los no futuro (p.04).

Em contrapartida, as mudanças nem sempre alcançam o nível necessário para o entendimento das operações matemáticas primeiras e a interposição de uma sequência lógica que pode ou não atrelar ao acúmulo desses conceitos, bem como, a necessidade da organização de um pensamento sistematizado, na perspectiva de formar um raciocínio com traços ativos, dinâmicos, vivos. Neste sentido, as questões postas até aqui, apontam para alguns desdobramentos que estão situados no processo de aprender Matemática, havendo, portanto, a necessidade de inserir outros aspectos nesta discussão, especialmente, a que se refere as dificuldades pontuais para aprender Matemática.

Para fazer esta discussão, nos ancoramos em Smith e Strick (2001), que sinalizam que o primeiro o passo é tentar entender o que seriam essas dificuldades de aprendizagem e que fatores contribuem para sua ocorrência, considerando que as dificuldades de aprendizagem têm se tornado objeto de estudo de pesquisas e debatidos com frequência por pesquisadores da área, que tem enfatizado a ideia primeira de reafirmar a complexidade de estudar Matemática básica na óptica do estudante. A esse respeito, Ferreira (1998), faz o seguinte destaque:

> [...] ao perceberem a Matemática como algo difícil e não se acreditando capaz de aprendê-la, os estudantes, muitas vezes, desenvolvem crenças aversivas em relação à situação de aprendizagem, o que dificulta a compreensão do conteúdo e termina por reforçar sua postura inicial, gerando um círculo vicioso (p.20).

Esta afirmativa nos leva a inferir que historicamente, quando se trata de aprender conceitos matemáticos, Silveira (2005), ressalta que a Matemática atravessou muitos saberes e, culturalmente, o sujeito reconhece o discurso pré-construído de que a *matemática é difícil*, com isso cria-se dificuldades subjetivas para buscar a continuidade de correlações em estudos posteriores, destacando consequências da não assimilação destes requisitos

prévios, que por exigência de um sistema de ensino homogêneo, reforça a vigência de uma base pontual em Matemática, para uma sequência estruturada em campo de memorização, que discorre do significado de 'não aprender', que de acordo com Dante (2002),

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos, não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamentos que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor (p.30).

No que diz respeito aos conceitos matemáticos ensinados na Escola Básica, consideramos que o professor é coautor desta ação e, com isso, assume a responsabilidade de interferência direta no processo de ensinar/aprender Matemática, no momento que este associa ao meio que difere do que será aplicado em contraponto do que é adquirido. Neste sentido, Lacanallo; Albuquerque e Mori (2009), defendem a importância do professor no processo de ensino e aprendizagem, pois é

> [...] indispensável à valorização do diálogo entre professor e aluno, destacando a necessidade do domínio dos conteúdos científicos, a sistematização e ordenação dos mesmos por parte do professor apresentando-se como mediador entre o conhecimento e o aluno no processo de ensino-aprendizagem (p. 91).

Do mesmo modo, a Formação Inicial e Continuada do professor, é importante para que este obtenha o domínio dos conteúdos (conceitos) a serem ensinados, fazendo uso de metodologias concernentes e coerentes, com o objetivo de minimizar essas dificuldades que contribuem em grande parte, para o insucesso dos estudantes na aprendizagem da Matemática. Em se tratando da aprendizagem, Moura (2007), considera que cada sujeito,

> [...] participa de modo diferenciado das atividades de aprendizagem, pois as suas possibilidades de acesso a novos conhecimentos dependerão do modo particular como cada um foi construindo a vida. Sendo assim, a atividade de ensino deve ser organizada de modo a comportar os vários níveis de aprendizagem dos sujeitos que participam do coletivo da sala de aula (p. 62).

Ainda para Moura (2007), o sentido de pluralidade de uma sala de aula, não faz com que a singularidade de aprender deixe de coexistir, pelo contrário, é nessa perspectiva que ocorre a individualidade dos conceitos. É sabido que seres distintos podem aprender com o meio, assim como, o meio pode ser o causador do atraso na aprendizagem. Uma vez que, não faria sentido se todos aprendessem da mesma forma e ao mesmo tempo na sala de aula, pois, cada estudante é um grande complexo de fatores que abrangem as áreas física, afetiva, social e cognitiva; eles estão em desenvolvimento simultâneo e com ritmos diferentes, como bem afirma Lorenzato (2010), o que é reforçado por Miguel (2002), ao afirmar que "o gosto pela Matemática decresce proporcionalmente ao avanço dos alunos pelos diversos ciclos do sistema de ensino, processo que culmina com o desenvolvimento de um sentimento de aversão, apatia e incapacidade diante da Matemática" (p. 375).

Como vimos, as dificuldades são recorrentes, especialmente quando se trata de gostar/entender/aprender conceitos matemáticos básicos. No entanto, essas dificuldades poderiam ser amenizadas se os significados desses conceitos fossem acentuados, por meio de novas metodologias que resgatassem o interesse dos estudantes, associado a motivação do professor para ensinar a partir do momento vivenciado, dando sentido ao próprio contexto, pois

> Uma matemática contextualizada não ilustra, mas sim, dá sentido ao conhecimento matemático na escola e, por extensão, ao cotidiano. Dar sentido ao conhecimento matemático torna o mesmo útil, uma vez que este não corre isolado, em momento especial ou definido (SILVA, 2014, p. 27).

Desta feita, a Matemática é concebida em qualquer ambiente. Mas, é preciso ser capaz de percebê-la acontecendo. E esta é a questão, pois a maioria dos estudantes, muitas vezes não conseguem ter esta percepção. É necessário, portanto, que essa contextualização aconteça de uma forma em que o estudante possa participar do processo de construção do conhecimento a partir do que ele já sabe, para então chegar a outros estágios de aprendizagem.

3 | PROCEDIMENTOS E MÉTODOS

Na perspectiva de alcançar o objetivo proposto de *analisar as dificuldades percebidas no/do processo de aprender conceitos matemáticos básicos por estudantes do Ensino Médio*, esta pesquisa se caracteriza como de natureza básica, de abordagem qualitativa descritiva, que Severino (2007), considera como aquela que, além de registrar e analisar os fenômenos estudados, busca identificar suas causas, seja através da aplicação do método experimental/matemático, seja da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos.

Desta forma, a pesquisa tem como *lócus* uma escola pública de Ensino Médio da rede estadual de ensino, localizada no município de Tracuateua no Estado do Pará. Participaram como informantes desta investigação, estudantes do Ensino Médio que foram selecionados a partir de observações diretas em contexto de práticas docente, considerando os seguintes critérios: a *maturidade* para saber lidar com fatores adversos e com as dificuldades em Matemática; a *percepção* destes em relação as dificuldades para aprender e o *interesse* em se dispor a participar deste estudo. Nessa perspectiva, Manzini (2004) afirma que a entrevista pode ser concebida como um processo de interação social, verbal e não verbal, entre um pesquisador, que tem um objetivo previamente definido, e um entrevistado que, supostamente, possui a informação que possibilita estudar o fenômeno em pauta.

Com isso, selecionamos 10 estudantes com faixa etária entre 15 a 18 anos, aqui identificados pelo seguinte código: EeM (Estudante do Ensino Médio) e o número de ordem sequencial. Exemplo: EeM1...EeM10). Estes estudantes foram entrevistados por meio de um roteiro com quatro perguntas subjetivas.

As informações constituídas foram analisadas por meio da estatística descritiva, que de acordo com Davila (2018), é o conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos realizados em qualquer área do conhecimento, para verificar a frequência das respostas e associar ao objetivo proposto nesta pesquisa.

4 I DIFICULDADES NO/DO PROCESSO DE APRENDER CONCEITOS MATEMÁTICOS

As discussões aqui se postam da interação das teorias com as questões que discorrem sobre as dificuldades de aprender conceitos matemáticos básicos, apontando outros elementos que estruturam este processo, identificados nos relatos dos informantes. A análise desses relatos ocorreu por meio da estatística descritiva, que permitiu a efetivação de uma frequência de blocos de análise com três respostas sinalizadas pelos informantes, que serviram como título para a chamada de cada um dos blocos de análise, a ideia dos blocos compostos pela assiduidade com que as respostas se efetivaram, assim sendo, criando uma frequência de organização para a compreensão dos possíveis elementos, é do vai tratar a primeira indagação.

4.1 De que forma percebe as dificuldades em aprender conceitos matemáticos básicos?

Esta primeira indagação objetiva construir informações acerca da percepção desses estudantes em relação as dificuldades para aprender conceitos matemáticos básicos. Das respostas dadas pelos dez estudantes, organizamos um bloco de três respostas que se diferem (e apresentam maior frequência), o que significa dizer que as demais respostas tem similaridade com as selecionadas. Para formar o bloco com as três respostas, fizemos a leitura dos relatos tendo como único critério, fazer a seleção das respostas a partir de uma *palavra-chave*, que a princípio, apontasse características de um possível elemento estruturante do processo de aprender conceitos matemáticos básicos.

Nesta primeira indagação selecionamos as respostas dadas pelos informantes identificados pelos códigos – EeM2; EeM5 e EeM8 –. Para analisar as respostas, destacamos em *itálico,* as palavras-chave que consideramos relevantes. E o que se observa nos excertos a seguir:

> [...] minha maior dificuldade é na hora da *interpretação* (EeM2);
>
> [...] a dificuldade é *pôr em prática* a fórmula na questão (EeM5);
>
> [...] são as *fórmulas e conceitos* que dificultam o aprendizado (EeM8).

A palavra-chave *interpretação* (EeM2) em destaque, pode ser considerada como um dos principais elementos estruturantes do processo de aprender conceitos matemáticos básicos, em razão das dificuldades que os estudantes encontram para interpretar as situações problemas. Esta ausência do domínio da leitura, aflige os estudantes em contexto geral, pois sem decodificar e interpretar aquilo que ele lê, certamente terá dificuldades para encontrar a resolução de uma dada situação problema. Neste sentido, todo o processo de aprender fica comprometido, ocasionando maior dificuldade, especialmente na hora de pôr em prática a fórmula na questão, como afirma EeM5.

Depreende-se que para aprender conceitos matemáticos, necessário se faz a mobilização de habilidades e raciocínios para compreender as várias *fórmulas e conceitos* (EeM8), que contribuem para dificultar o aprendizado desses conceitos.

> Para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento (BRASIL, 2018, p. 519).

Nesse sentido, compreendemos que a linguagem Matemática dispõe de regularidades e padrões em que a interpretação lógica destes, é necessária. Para que essa interpretação ocorra é importante a interação com o ambiente, a argumentação com colegas, professores, bem como, o uso de exemplos e generalizações, afim de dar sentido e significado a aprendizagem.

Nas respostas dadas à primeira indagação, fica evidenciado que os estudantes têm percepção das dificuldades e limitações para aprender fórmulas e interpretar problemas. Essa evidência nos leva a outra questão, considerando que as dificuldades encontradas, são fortes elementos para desmotivar os estudantes para aprender conceitos. É o que vai discutir a segunda indagação.

4.2 Sente-se motivado para aprender conceitos matemáticos?

Esta indagação teve como objetivo saber de cada um dos dez estudantes se estes se sentem motivados para aprender conceitos matemáticos. Não diferente da anterior, aqui também organizamos um bloco de três respostas, seguindo o mesmo critério. As respostas selecionadas estão identificadas pelos códigos EeM1; EeM3 e EeM7.

> Não. Me sentiria motivado se eu fosse *trabalhar com a matéria* (EeM1)

> Não. Porque *tenho dificuldades e a escola não ajuda* (EeM3)

> Sim. A *matemática está em tudo* e presente em nosso cotidiano (EeM7).

Como observado, das três respostas, apenas o estudante identificado pelo código EeM7, afirmou ser motivado para aprender, pois este considera que [...] *a matemática está em tudo* e presente em nosso cotidiano*.* Esta afirmativa constata que quando conteúdos como fórmulas, equações, regras e todo tipo de representações trabalhadas de forma contextualizada, evidencia as relações fundamentais (LACANALLO; ALBUQUERQUE e MORI, 2009), necessárias para que o estudante consiga fazer a associação desses conhecimentos à uma situação prática.

> É muito importante que o aluno, lançando mão de seus conhecimentos, estabeleça analogias entre os vários temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do saber, incluindo situações do dia-a-dia. Através do levantamento de hipóteses, tentativas, utilizando conceitos já construídos para resolver problemas, e principalmente relacionando ideias matemáticas, sugere-se que o discente poderá, de forma eficaz, construir novos conceitos (GADOTTI, 2008, p.41).

No entanto, para fazer essa aproximação é necessário, antes de tudo, planejar de que forma dar-se-á esta abordagem para que os resultados sejam exitosos.

Considerando que os demais estudantes sinalizaram não se sentirem motivados, é notório que a motivação destes em relação à Matemática não é expressiva. EeM7 afirma que só se [...] *sentiria motivado se fosse trabalhar com a matéria,* ocorrendo o contrário com EeM3 que não tem motivação por duas razões. Primeiro porque [...] *tenho dificuldades* e, segundo porquê *[...] a escola não ajuda*. Também fica evidenciado que a escola tem sua parcela de culpa no que se refere à desmotivação desses estudantes para aprender. E aprender estes conceitos é dispor de meios que inferem na realidade, pois

> [...] quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, entre outros (BRASIL, 2018, p. 518).

O contexto em que o estudante está inserido pode ser considerado de grande relevância para a existência da motivação ou determinar a falta dela. Dito isto, podemos inferir que as duas primeiras indagações trazem elementos que sinalizam algumas dificuldades para aprender. Considerando essas limitações, ousamos inquirir sobre a forma que esses estudantes compreendem a matemática, aspecto este a ser discutido na terceira indagação.

4.3 Qual a melhor forma de compreender os conceitos matemáticos?

Esta indagação se propõe discorrer sobre a forma como os estudantes compreendem os conceitos matemáticos. Assim como nas questões anteriores, as discussões têm como ponto de partida, um bloco de três respostas dadas pelos estudantes EeM4; EeM6 e EeM9, como observado nos excertos.

> [...] prefiro através de *métodos mais práticos* (EeM4)

> [...] com métodos *mais diretos* (EeM6)

> [...] de uma *forma mais prática* e para ser entendido é preciso ser praticado também (EeM9).

Como observado, os estudantes EeM4 e EeM9, sinalizam que a melhor maneira de compreender os conceitos matemáticos, é quando estes são ensinados de *forma mais prática.* No entanto, ressaltam que para haver o entendimento desses conceitos, necessário se faz que estes conhecimentos sejam *praticados também.* Aqui se observa a importância da prática, pois a teoria por si só, não é suficiente para fixar a aprendizagem de um determinado conteúdo. Nesse sentido Gadotti (2008), sinaliza que:

> Levar o aluno a substituir o conhecimento espontâneo pelo científico através de atividades requer tempo e se dá gradualmente. A linguagem matemática é simbólica, portanto, exige familiaridade para ser compreendida. A apreensão dos significados vai sendo feita aos poucos, a cada atividade com novas inferências. A formação de conceito demanda tempo e depende do nível de desenvolvimento de cada pessoa (p.51).

Contrário a este posicionamento, EeM6 afirma que prefere aprender por meio de métodos mais diretos. Estas falas confirmam que o ambiente da sala de aula é plural, cada indivíduo é único dentro de sua especificidade.

Consideramos relevante ouvir destes estudantes, indicativos de possíveis aspectos que eles consideram como elementos estruturantes presentes no processo de aprender conceitos matemáticos, é o que discorre a quarta indagação.

4.4 Que elementos considera como estruturantes para aprender matemática?

Esta última indagação destina-se a trabalhar aspectos apontados pelos estudantes EeM2; EeM5 e EeM10, que julgaram ser elementos estruturantes no processo de aprendizagem da Matemática. Desta forma, selecionamos três respostas que compõem este bloco, como observado a seguir.

> [...] a *falta de incentivo* da escola (EeM2)

> [...] *não saber a tabuada* (EeM5)

> [...] a *matemática mexe com o nosso psicológico* e torna-se estressante, por isso faz com que desistimos de estudar e não aprender o básico (EeM10).

A afirmativa de EeM2 – a *falta de incentivo da escola* – surge pela segunda vez neste texto, pois EeM3 já havia feito esta afirmativa, quando na segunda indagação, perguntamos se estes estudantes se sentiam *motivados para aprender os conceitos matemáticos.* Tanto EeM2 quanto EeM3, dão a entender que a escola está ausente quando as questões estão

relacionadas ao ensino, atribuindo este papel única e exclusivamente ao professor, o que é lamentável, considerando que a escola como instituição social, reúne em um só espaço, metas, objetivos e desafios que devem ser superados pela aplicação de conhecimentos socialmente produzidos, pois a escola é uma instituição fundamental na constituição do intelecto do indivíduo, como bem afirma Gadotti (2008).

Outro aspecto que pode ser considerado como um elemento estruturante é *não saber a tabuada* apontado por EeM5. Apesar de ser a tabuada um dos primeiros conhecimentos que aprendemos na escola, ainda assim, ela é vista como algo traumático, assim como, tudo aquilo que se relaciona a matemática, acaba afetando *o nosso psicológico e torna-se estressante* (EeM10), pois na maioria das vezes, aprender o básico leva algum tempo para que o desenvolvimento orgânico ocorra. A este respeito, Lacanallo; Albuquerque e Mori (2009), afirmam que o ensino da Matemática deve estar pautado na elaboração de atividades direcionadas, intencionais, que possibilitem ao estudante, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, como a memória, a abstração que são indispensáveis à formação de conceitos.

A partir da análise das questões aqui abordadas, conseguimos identificar aspectos que nos permitiram apontar elementos que podem ser considerados como estruturantes no que se refere as dificuldades do processo de aprender conceitos matemáticos básicos. Estes elementos reforçam as discussões que nosso estudo se fundamenta, pois, os elementos citados, apresentam similaridades com os estudos das causas que estruturam a não aprendizagem de conceitos matemáticos básicos.

Como observado, os estudantes têm consciência das dificuldades para aprender Matemática, apesar dos elementos apontados, estes sabem da importância destes conceitos matemáticos na vida de cada um deles.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada para a elaboração deste artigo, foi oportuna para repensar as nossas práticas como professoras, pois conceitos matemáticos ainda são tratados substancialmente, e existe uma lacuna expressiva quanto a óptica dos estudantes que necessitam destes conceitos matemáticos, que o ensino público em meio a reformas e bases, não dispõe de estruturas físicas para acontecer, pois é sabido que as estruturas de nossas escolas, em sua maioria, não é pontual, quando não atende somente o básico.

Os resultados expressam fatores reais, percebidos e vivenciados, que interferem diretamente no ensino e na aprendizagem dos estudantes, que não se ausenta somente em Matemática, mas, em várias outras áreas do conhecimento. Nossos estudantes, em sua maioria, se tornaram aversivos as linhas de conhecimentos que regem a Educação Básica, que na opinião destes, já se percebe o conformismo. Portanto, estes elementos que inferem no processo, acarretam o desinteresse, que a história de sujeitos deste estudo,

convergem para resultados similares, quanto as oportunidades e as motivações, somando-se a outras dificuldades no contexto que este estudante está inserido.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

CARVALHO, T. F. **Sobre linguagens, conceitos matemáticos e o discurso científico.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.1, p.26-38, UFSC: 2009.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo. Ática, 2002.

DAVILA, V. H. L., **Aula 1-aula5**. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br>. Acesso em: 6 fev. 2018.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. - São Paulo: Summus; Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

FERREIRA, A. C. **O desafio de ensinar - aprender matemática no noturno**: **um estudo das crenças de estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte.** Campinas; SP: [s, n],1998.

GADOTTI, M. de F. **Definições matemáticas do conceito de ângulo: influências da história, do movimento da matemática moderna e das produções didáticas nas concepções dos docentes.** Programa de Pós-Graduação em Educação da UNIMEP. Piracicaba-São Paulo, 2008.

LACANALLO, L. F.; ALBUQUERQUE, R. A.; MORI, N. N. R. **A Ação Docente e o Ensino de conceitos Matemáticos:** algumas reflexões numa perspectiva Histórico-Cultural. Seminário de pesquisa do P.P.E; Universidade Estadual de Maringá. 2009.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. Campinas. São Paulo. Autores Associados. 2010.

MANZINI, E. J. **Entrevista semie-struturada: análise de objetivos e de roteiros.** In: seminário internacional sobre pesquisa e estudos qualitativos, 2, 2004, Bauru. A pesquisa qualitativa em debate. Anais... Bauru: USC, 2004.

MARQUES, D. I. V.; HARTMANN, **Â. M. Etnomatemática: estudo de conhecimento de suas dimensões no contexto pedagógico.** Universidade Federal do Pampa – Campus Caçapava do Sul Curso: Licenciatura em Ciências Exatas – Semestre: 02/2014.

MIGUEL, J. C. **O Ensino De Matemática na perspectiva da formação de conceitos: Implicações teórico-metodológicas.** Departamento de Didática – Faculdade de Filosofia e Ciências – UNESP – Campus de Marília. 2002.

MOURA, M. O. de. Matemática na infância. In: **Educação Matemática na Infância** – Abordagens e desafios. MIGUEIS, Marlene da Rocha; AZEVEDO, Maria da Graça. 1ª Edição, janeiro de 2007. Edições Gaileiro. Vila Nova de Gaia.

ONRUBIA, J. **Ensinar: criar zonas de desenvolvimento proximal e nelas intervir**. In. COLL, C et. al. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 2001.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. __ 23ª edição rev. e atual. – São Paulo: Cortez. 2007.

SILVA, M. V. da. **As dificuldades de aprendizagem da matemática e sua relação com a metofobia** – 2014. 58 p.: il. Color.

SILVEIRA**,** M. R. A. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/ aprendizagem da matemática.** Porto Alegre: UFRGS, 2005.

SMITH, C. STRICK, L. **Dificuldades de aprendizagem de A a Z.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

VITTI, C.M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**.2ª.ed. Piracicaba-São Paulo. Editora UNIMEP,1999.

CAPÍTULO 9

SIMULAÇÃO DE SISTEMAS DE FILAS M/M/1 E M/M/c

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Nilson Luiz Castelucio Brito
Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES
Montes Claros – MG
https://orcid.org/0000-0003-0094-0791

Rosivaldo Antonio Gonçalves
Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES
Montes Claros – MG
http://lattes.cnpq.br/9107444768452858

Grazziella Nuzzi Ribeiro D'Angelo
Universidade Estadual de Montes Claros – UNIMONTES
Montes Claros – MG

RESUMO: A Teoria de Filas consiste na modelagem analítica de sistemas que resultam em espera e tem como objetivo determinar e avaliar quantidades denominadas medidas de desempenho que expressam a produtividade/ operacionalidade desses processos. Este trabalho desenvolveu uma rotina no RStudio capaz de simular sistemas de filas *M/M/1* e *M/M/2*. As simulações foram feitas utilizando o método Monte Carlo. A rotina foi bastante robusta, pois forneceu valores simulados bem próximos dos teóricos, sobretudo com o aumento do tamanho da amostra.
PALAVRAS-CHAVE: Filas, simulação Monte Carlo, RStudio.

SIMULATION OF QUEUE SYSTEMS M/M/1 AND M/M/C

ABSTRACT: Queuing Theory consists of the analytical modeling of systems that result in waiting and aims to determine and evaluate quantities called performance measures that express the productivity / operability of these processes. This work developed a routine in RStudio capable of simulating M/M/1 and M/M/2 queuing systems. The simulations were carried out using the Monte Carlo method. The routine was very robust, as it provided simulated values very close to the theoretical ones, especially with the increase in the sample size.
KEYWORDS: Queues, Monte Carlo simulation, RStudio.

1 | INTRODUÇÃO

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Estimação de Parâmetros

As variáveis aleatórias $X_1,...,X_n$ são chamadas amostra aleatória de tamanho n da população f(x) se $X_1,...,X_n$ forem variáveis aleatórias mutuamente independentes e a distribuição marginal de cada X_i é a mesma função f(x). A distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias é utilizada para estimar os parâmetros de uma população (média e variância, por exemplo) através de métodos algébricos (método dos momentos e método da máxima verossimilhança) ou

de métodos numéricos (simulação). O objetivo deste trabalho é propor uma simulação utilizando o software RStudio para estimar os parâmetros de filas M/M/1 e M/M/2. RStudio é um software livre de ambiente de desenvolvimento integrado para R, uma linguagem de programação para gráficos e cálculos estatísticos.

2.2 Simulação

O termo "simular" possui diversas definições nos vários ramos do conhecimento humano. Conforme o dicionário simular é "fazer aparecer como real uma coisa que não o é; fingir". Dependendo do ambiente em que o termo é utilizado, suas técnicas e métodos são completamente diferentes. Neste trabalho, simulação será entendida como as técnicas de solução de um problema pela análise de um modelo que descreve o comportamento do sistema utilizando um software. As simulações foram realizadas utilizando o método de Monte Carlo.

Suponha que se deseje estimar θ=E(X), isto é, o valor esperado de uma variável aleatória X. Suponha, ainda, que possa ser gerada uma amostra aleatória de tamanho n. Cada vez que um valor é gerado, diz-se que uma simulação foi concluída. Se $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ é a média amostral, então, ela é um estimador não-viciado de θ, ou seja, $E(\bar{X})$. Além disso, $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, em que σ^2 é a variância populacional.

Pelo Teorema Central do Limite (TCL), se n é suficientemente grande, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ será tão pequeno que $\bar{X}$ será bastante próximo de θ. Esta abordagem é conhecida como a simulação de Monte Carlo.

2.3 Filas

Nenhum de nós consegue escapar de uma fila. Cada um de nós provavelmente tem uma situação relativa a uma fila que marcou. Infelizmente, este fenômeno é cada vez mais comum nas sociedades desenvolvidas. Esperamos em uma fila dentro dos carros em congestionamentos de trânsito ou em praças de pedágios. Esperamos em fila para sermos atendidos em supermercados, bancos, restaurantes, etc. Assim como os clientes não gostam de filas, os gerentes dos serviços que as geram também não, pois elas representam um custo para os negócios. Então, por quê existe a fila de espera? A resposta é simples: existe maior demanda pelo serviço do que recursos para realizá-lo. E isso ocorre por diversas razões. Uma delas é a escassez de servidores disponíveis. Outra razão é que pode ser economicamente inviável para um negócio disponibilizar o nível de serviço necessário para prevenir filas de espera. Pode, ainda, haver limitação de espaço no volume de serviço que pode ser disponibilizado. De um modo geral, essas limitações podem ser resolvidas com gasto de capital e pelo conhecimento do quanto de serviço poderia ser disponibilizado, desde que conheçamos a resposta a questões do tipo: "Qual o custo de um usuário ficar esperando?" ou "Quantas pessoas podem ficar em uma fila?" A teoria das filas tenta – e em muitos casos, com sucesso – responder a essas questões através de uma análise matemática detalhada.

2.3.1 Notação Usual

A caracterização de uma fila é feita utilizando a notação de Kendall[x], cuja forma é *A/B/X/Y/Z*, em que *A* descreve a distribuição do tempo entre chegadas, *B*, a distribuição do tempo de serviço, *X*, o número de servidores, *Y*, a capacidade do sistema, ou seja, o número de usuários na sala de espera mais o número de usuários que estão sendo atendidos, e, *Z*, a disciplina de atendimento. Alguns exemplos de escolhas para *A* e *B*: *M*, para distribuição exponencial (memoryless), E_k, para distribuição Erlang tipo-*k* e *G*, para determinística. A disciplina de atendimento refere-se à maneira pela qual os clientes são selecionados para o serviço quando a fila está formada. A disciplina mais comum é “primeiro a chegar, primeiro a ser servido” (FCFS, do termo em inglês *first come, first served*). A capacidade do sistema diz respeito a existência ou não de limitação física no tamanho da área de espera. Assim, se houver esse tipo de limitação, quando o comprimento da fila atinge certo tamanho, nenhum cliente adicional será admitido na área de espera até que haja espaço disponível devido a conclusão de um serviço. Quando são omitidos *Y* e *Z* na notação de Kendall, entende-se que a fila tem capacidade infinita e disciplina FCFS. Neste trabalho, as filas de interesse são *M/M/1* e *M/M/2*, ou seja, os tempos entre chegadas e o tempo do serviço seguem uma distribuição exponencial, tendo um servidor único no primeiro caso e dois servidores no segundo, a capacidade é infinita e a disciplina de atendimento é FCFS em ambos os casos. A distribuição exponencial tem como função densidade de probabilidade $f(t) = \lambda e^{-\lambda}$, $t \geq 0$. Consequentemente, a função de distribuição é $F(t) = 1-e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ cujos gráficos, para $\lambda = 2$ são apresentados na figura 1.
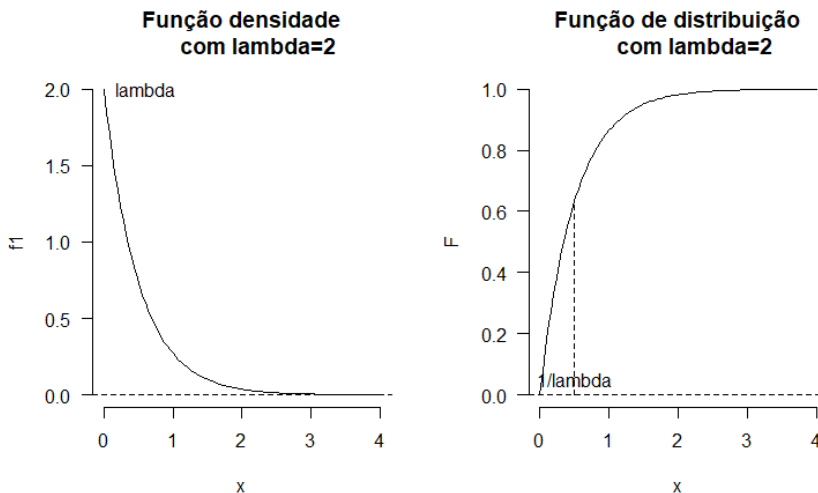
Figura 1- Gráficos de uma distribuição exponencial

2.3.2 Medidas de Desempenho para Filas

As cinco características de um sistema de filas em geral são suficientes para descrever completamente um processo sob estudo. No procedimento de seleção do modelo para o processo de fila é extremamente importante utilizar o modelo correto ou pelo menos um que descreva a real situação que está sendo estudada. Denotando por λ a taxa média de entrada de usuários no sistema e μ a taxa média de serviço, pode-se definir a *intensidade de tráfego* $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$, uma medida do congestionamento de tráfego para um sistema com *c* servidores. Quando p > 1, isto é, λ > cμ, a taxa de chegada excede a máxima taxa de serviço do sistema, é esperado, com o passar do tempo, que a fila se torne cada vez maior, a menos que novos usuários não sejam mais autorizados a entrar no sistema. Foram feitas 5000 simulações Monte Carlo utilizando o software livre RStudio com amostras de tamanho n = 10 e n = 100, com taxa de atendimento fixa igual a 2, ou seja, tempo médio de atendimento igual a 0.5 e taxas de chegada iguais a 1 e 1,250, correspondendo, respectivamente, aos tempos médios entre chegadas de 1 e 0,8. A figura 2 mostra as distribuições teóricas e empíricas das chegadas (λ = 1) e do atendimento para (μ = 2) fixo.
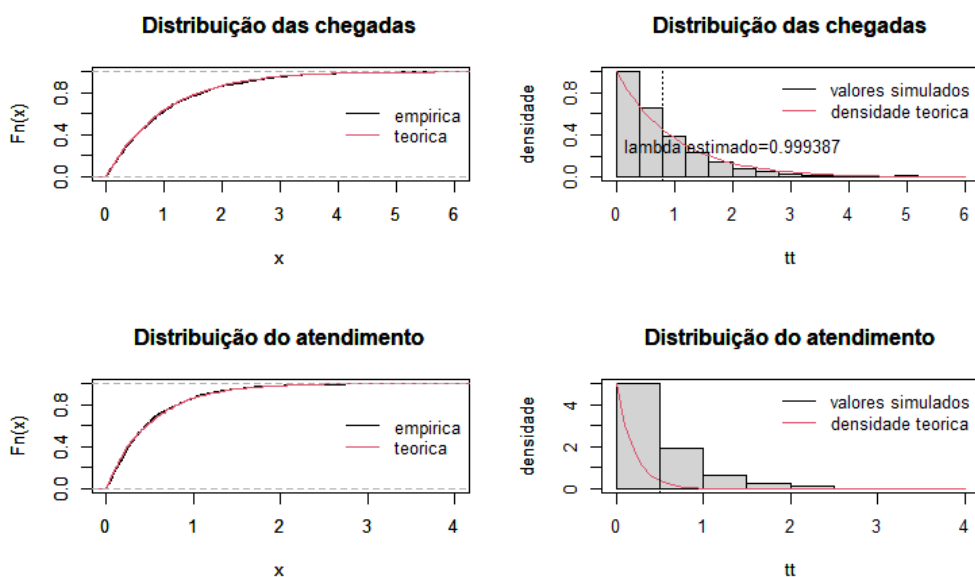
Figura 2- Gráficos dos valores teóricos e simulados

Na maioria das vezes, resolver problemas de filas significa encontrar a distribuição de probabilidade do número total de usuários no sistema N(t) no tempo *t*, que é composto

por aqueles que esperam na fila, $N_q(t)$, e os que estão em serviço, $N_s(t)$. Assim, duas medidas de interesse imediato são o número médio de usuários no sistema e do número médio de usuários na fila. Denotando por N o número de usuários no sistema em regime estacionário, L seu valor médio, N_q o número de usuários na fila em regime estacionário e L_q seu valor médio, temos as seguintes relações conhecidas como **medidas de desempenho** de uma fila.

Medida	Notação	Fórmula
Número médio de usuários no sistema	L	$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Número médio de usuários na fila	L_q	$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
Tempo médio de permanência no sistema	W	$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
Tempo médio de espera na fila	W_q	$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$
Probabilidade do sistema estar vazio	p_0	$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Tabela 1 – Medidas de desempenho de uma fila *M/M/1*

Para uma fila com c servidores(*M/M/c*), denotando $r = \frac{\lambda}{\mu}$, a taxa de utilização do sistema é dada por $\rho = \frac{r}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}$.

Medida	Notação	Fórmula
Número médio de usuários no sistema	L	$L = r + \left[\frac{r^{c+1}c}{c!\,(c-r)^2}\right]p_0$
Número médio de usuários na fila	L_q	$L_q = \frac{p_0 c r^{c+1}}{c!\,(c-r)^2}$
Tempo médio de permanência no sistema	W	$W = \frac{1}{\mu} + W_q$
Tempo médio de espera na fila	W_q	$W_q = \frac{r^c \mu}{(c-1)!\,(c\mu - \lambda)^2} p_0$
Probabilidade do sistema estar vazio	p_0	$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!\,(c-r)}\right)^{-1}$

Tabela 2 – Medidas de desempenho de uma fila *M/M/c*

3 I RESULTADOS OBTIDOS

A tabela 3 mostra os resultados correspondentes a 5000 simulações Monte Carlo com amostras de tamanhos n = 10 e n = 100 realizadas em uma fila *M/M/1* com taxa de serviço $\mu = 2$ e taxa de chegadas $\lambda = 1$. Os resultados correspondentes a 5000 simulações Monte Carlo com amostras de tamanhos n = 10 e n = 100 realizadas em uma fila *M/M/1* com taxa de serviço $\mu = 2$ e taxa de chegadas $\lambda = 1,25$ são mostrados na tabela 4.

Medida de desempenho	Valor teórico	Valor simulado para	Erro absoluto	Valor simulado para	Erro absoluto
λ	1	1.0067	0.0067	0.9983	0.0017
ρ	0.5	0.5033	0.0033	0.4992	0.0008
L	1	1.0134	0.0134	0.9967	0.0033
L_q	0.5	0.5101	0.0101	0.4975	0.0025
W	1	1.0067	0.0067	0.9983	0.0017
W_q	0.5	0.5067	0.0067	0.4983	0.0017
p_0	0.5	0.4967	0.0033	0.5008	0.0008

Tabela 3 – Valores teóricos e simulados para taxa de chegadas igual a 1 e taxa de atendimento fixa igual a 2

Medida de desempenho	Valor teórico	Valor simulado para	Erro absoluto	Valor simulado para	Erro absoluto
λ	1.2500	1.2583	0.0083	1.2479	0.0021
ρ	0.6250	0.6292	0.0042	0.6240	0.0010
L	1.6667	1.6966	0.0299	1.6593	0.0074
L_q	1.0417	1.0675	0.0258	1.0353	0.0064
W	1.3333	1.3483	0.0150	1.3296	0.0037
W_q	0.8333	0.8483	0.0150	0.8296	0.0037
p_0	0.3750	0.3708	0.0042	0.3760	0.0010

Tabela 4 – Valores teóricos e simulados para taxa de chegadas igual a 1.25 e taxa de atendimento fixa igual a 2

Os resultados mostrados na tabela 5 foram obtidos por 5000 simulações Monte Carlo com amostras de tamanho n = 10 e n = 100 com $\lambda = 1$ e $\mu = 2$. Neste caso, foram feitas simulações tanto para a taxa de chegadas quanto para a de atendimento. O Anexo 1 apresenta o script utilizado para simular filas M/M/1. Como pode ser visto, basta o usuário definir os valores das taxas de chegadas e de atendimento.

Medida de desempenho	Valor teórico	Valor simulado para	Erro absoluto	Valor simulado para	Erro absoluto
λ	1	1.0067	0.0067	0.9995	$5x10^{-4}$
μ	2	1.9890	0.0110	1.9999	$1x10^{-4}$
ρ	0.2500	0.2531	0.0031	0.2499	$1x10^{-4}$
L	0.5310	0.5383	0.0073	0.5308	$2x10^{-4}$
L_q	0.0310	0.0322	0.0012	0.03097	$3.9x10^{-4}$
W	0.5310	0.5347	0.0037	0.0531	0
W_q	0.0310	0.0320	0.0010	0.03098	$2.5x10^{-4}$
p_0	0.5581	0.5538	0.0043	0.5583	$1x10^{-4}$

Tabela 5 – Valores teóricos e simulados para taxa de chegadas igual a 1 e taxa de atendimento igual a 2

4 | CONCLUSÕES

Podemos verificar que as simulações realizadas utilizando o método de Monte Carlo podem fornecer resultados bastante confiáveis, uma vez que produzem erros pequenos, sobretudo quando se aumenta o tamanho da amostra. Assim, se não dispomos de dados suficientes para projetar um sistema de filas, a simulação pode fornecer uma boa aproximação da realidade capaz de permitir a tomada de decisão sobre adotar ou não o modelo de fila proposto.

REFERÊNCIAS

BRITO, Nilson Luiz Castelucio **Otimização Multiobjetivo em Redes de Filas**. Tese de Doutorado. Belo Horizonte. UFMG. 2013.

GROSS, Donald; HARRIS, Carl M. **Fundamentals of Queueing Theory.** 2nd Edition. John Wiley & Sons. 1985.

KENDALL, D.G. **Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains.** Annals Mathematical Statistics. 1953. 24:338-354.

RStudio Team (2020). RStudio: Integrated Development for R. RStudio, PBC, Boston, MA URL http://www.rstudio.com/.

ANEXO 1

```
#SCRIPT PARA FILAS M/M/1
##########################
#AQUI COMECA A SIMULACAO #
##########################
cat("\14") #limpa a tela do console
rm(list=ls())#limpa a memoria
set.seed(1234)#mantendo fixa a semente gera sempre os mesmos valores
#taxa de atendimento:
#t_a=2
cat("Entre com a taxa de atendimento: ","\n")
t_a<-scan(n=1)

#lambda=1
cat("Entre com a taxa de chegadas:","\n")
t_c<-scan(n=1)

cat("Entre com o numero de servidores:", "\n")
c<-scan(n=1)

#########
cat("\n")

r<-t_c/t_a
r

rho<-r/c
rho

if(rho>1){
  cat("Taxa de ocupacao maior que 1: Entre com outros valores", "\n")
}else{
  rho=rho
}
#####################

#simula chegadas
###########################################
#Trabalhando com amostras de tamanho n=10 #
###########################################
amostra1<-matrix(nrow=5000,ncol=10)
for(i in 1:5000){
  amostra1[i,1:10]<- rexp(10,t_c)
}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
media1<-matrix(nrow=5000,ncol=1)
for(i in 1:5000){
  media1[i]<-mean(amostra1[i,1:10])
}

lambda <- function(media1){
  lambdasim<-1/mean(media1)
  cat("Taxa de chegada: \n ")
  cat("Valor teorico =", t_c, ";",   "Valor simulado =" , lambdasim,
"\n")
}
lambda(media1)

Resumo1 <- function(lambda){
  lambdasim<-1/mean(media1)
```

```
  #lambda<-1/mean(media1)
  rhos <- lambdasim/t_a
  Lsim <- lambdasim/(t_a-lambdasim)
  Lqsim <- (lambdasim)^2/(t_a*((t_a-lambdasim)))
  Wsim <- 1/(t_a-lambdasim)
  Wqsim <- lambdasim/(t_a*(t_a-lambdasim))
  psim <- 1-(lambdasim/t_a)
  lambteor <- t_c
  rhoteor <- t_c/t_a
  Lteor <- t_c/(t_a-t_c)
  Lqteor <- (t_c)^2/(t_a*((t_a-t_c)))
  Wteor <- 1/(t_a-t_c)
  Wqteor <- t_c/(t_a*(t_a-t_c))
  pteor <- 1-(t_c/t_a)
  #cat("RESUMO COM AMOSTRAS DE TAMANHO 10 \n")
  cat("Valores teoricos: \n")
  cat("lambda=", lambteor, "\t", "rho=", rhoteor, "\t", "L=", Lteor,
"\t", "\n")
  cat("Lq=", Lqteor , "\t", "W=" , Wteor, "\t", "Wq=", Wqteor ,"\t",
"p=", pteor, "\n\n")
  cat("Valores simulados com amostras de tamanho n=10 \n")
  cat("lambda=", round(lambdasim,4), "\t", "rho=", round(rhos,4), "\t",
"L=", round(Lsim,4), "\t", "\n")
  cat("Lq=", round(Lqsim,4) , "\t", "W=" , round(Wsim,4), "\t", "Wq=",
round(Wqsim,4), "\t", "p=",
      round(psim,4), "\n\n")
    cat("Erros absolutos: \n")
  cat("lambda=",   round(abs(lambdasim-t_c),4),       "\t",    "rho=",
round(abs(rhos-rho),4), "\t",
      "L=", round(abs(Lsim-Lteor),4),  "\t", "\n")
  cat("Lq=",  round(abs(Lqsim-Lqteor),4),  "\t",  "W=",  round(abs(Wsim-
Wteor),4),"\t",
      "Wq=",  round(abs(Wqsim-Wqteor),4),  "\t",  "p=",  round(abs(psim-
pteor),4), "\t", "\n")
    }
```

ANEXO 2

```
#SCRIPT PARA FILAS M/M/c
###################
#                 #
#  AGORA COM c=2  #
#                 #
###################
cat("\14") #limpa a tela do console (1)(lambda=1 n=10)
rm(list=ls())#limpa a memoria
set.seed(1234)#mantendo fixa a semente gera sempre os mesmos valores
#taxa de atendimento:
#t_a=2
cat("Entre com a taxa de atendimento: ","\n")
t_a<-scan(n=1)

#lambda=1 n=10
cat("Entre com a taxa de chegadas:","\n")
t_c<-scan(n=1)

#c=2
cat("Entre com o numero de servidores:", "\n")
c<-scan(n=1)

#########
```

```
cat("\n")

r<-t_c/t_a
r

rho<-r/c
rho

if(rho>1){
  cat("Taxa de ocupacao maior que 1: Entre com outros valores", "\n")
}else{
  rho=rho
}
#####################

#simula chegadas
###########################################
#Trabalhando com amostras de tamanho n=10 #
###########################################
amostra1<-matrix(nrow=5000,ncol=10)
for(i in 1:5000){
  amostra1[i,1:10]<- rexp(10,t_c)
}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
media1<-matrix(nrow=5000,ncol=1)
for(i in 1:5000){
  media1[i]<-mean(amostra1[i,1:10])
}

#valor estimado de lambda
lambda <- function(media1){
  lambdasim<-1/mean(media1)
  cat("Taxa de chegada: \n ")
  cat("Valor teorico =", t_c, ";",   "Valor simulado =" , lambdasim,
"\n")
}
lambda(media1)

#simula atendimentos
amostraat<-matrix(nrow=5000,ncol=10)
for(i in 1:5000){
  amostraat[i,1:10]<- rexp(10,t_a)
}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
mediaat<-matrix(nrow=5000,ncol=1)
for(i in 1:5000){
  mediaat[i]<-mean(amostraat[i,1:10])
}

muhat<-length(amostraat)/sum(amostraat)
muhat

lambdahat<-1/mean(media1)
rsim=lambdahat/muhat
rsim

rhosim=rsim/c
rhosim
###########################################
#Probabilidade do sistema estar vazio
```

```
aux=((r^0)/factorial(0))+((r^1)/factorial(1))+((r^2)/factorial(2))+(c*
r^c)/(factorial(c)*(c-r))
p0=1/aux
p0



auxsim=((rsim^0)/factorial(0))+((rsim^1)/factorial(1))+((rsim^2)/facto
rial(2))+(c*rsim^c)/(factorial(c)*(c-rsim))

p0sim<-1/auxsim
p0sim

Lq=(p0*c*r^(c+1))/(factorial(c)*(c-r)^2)
Lq

Lqsim<-p0sim*c*rsim^(c+1)/(factorial(c)*(c-rsim)^2)
Lqsim

#Numero esperado no sistema
L=r+((r^(c+1)*c)/(factorial(c)*(c-r)^2))*p0
L

Lsim<-rsim+((rsim^(c+1)*c)/(factorial(c)*(c-rsim)^2))*p0sim
Lsim

#Tempo medio de espera na fila
Wq=(((r^c)*t_a)/(factorial(c-1)*((c*t_a)-t_c)^2))*p0
Wq

Wqsim<-((rsim^c)*muhat/(factorial(c-1)*((c*muhat)-lambdahat)^2))*p0sim
Wqsim

W=(1/t_a)+Wq
W

Wsim<-(1/muhat)+Wqsim
Wsim

Resumo3 <- function(lambda){
  lambdasim<-1/mean(media1)
  #lambda<-1/mean(media1)
  rhos <- rhosim
  Lsim <- Lsim
  Lqsim <- Lqsim
  Wsim <- Wsim
  Wqsim <- Wqsim
  psim <- p0sim
  lambteor <- t_c
  rhoteor <- r/c
  Lteor <- L
  Lqteor <- Lq
  Wteor <- W
  Wqteor <- Wq
  pteor <- p0
  #cat("RESUMO COM AMOSTRAS DE TAMANHO 10 \n")
  cat("Valores teoricos: \n")
  cat("lambda=",  round(lambteor,4),  "\t",  "rho=",  round(rhoteor,4),
"\t", "L=", round(Lteor,4), "\t",
      "mu=", t_a, "\t", "\n")
```

```
  cat("Lq=", round(Lqteor,4) , "\t", "W=" , round(Wteor,4), "\t", "Wq=",
round(Wqteor,4) ,"\t",
      "p=", round(pteor,4), "\n\n")
  cat("Valores simulados com amostras de tamanho n=10 \n")
  cat("lambda=", round(lambdasim,4), "\t", "rho=", round(rhos,4), "\t",
"L=", round(Lsim,4), "\t",
      "mu=" ,round(muhat,4),  "\t", "\n")
  cat("Lq=", round(Lqsim,4) , "\t", "W=" , round(Wsim,4), "\t", "Wq=",
round(Wqsim,4), "\t", "p=",
      round(psim,4), "\n\n")
    cat("Erros absolutos: \n")
  cat("lambda=",   round(abs(lambdasim-t_c),4),      "\t",    "rho=",
round(abs(rhos-rho),4), "\t",
      "L=",  round(abs(Lsim-Lteor),4),  "\t",  "mu=",  round(abs(muhat-
t_a),4), "\t", "\n")
  cat("Lq=",  round(abs(Lqsim-Lqteor),4),  "\t",  "W=",  round(abs(Wsim-
Wteor),4),"\t",
      "Wq=",  round(abs(Wqsim-Wqteor),4),  "\t",  "p=",  round(abs(psim-
pteor),4), "\t", "\n")
}

Resumo3(lambda)
```

CAPÍTULO 10

MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO LU/LDU BASEADO NO ALGORITMO DE SADOSKY

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 03/01/2021

Vinícius Guimarães de Oliveira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná
http://lattes.cnpq.br/0076111919173129

Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná
http://lattes.cnpq.br/1045931096324971

Fernando Cézar Gonçalves Manso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão – Paraná
http://lattes.cnpq.br/2920136847904900

RESUMO: A pesquisa desenvolvida buscou desenvolver um novo método de decomposição LU baseado no algoritmo de Sadosky e auxiliar os estudantes de engenharia, a partir da construção de interfaces gráficas, quanto aos diferentes métodos que podem ser aplicados às matrizes. A decomposição LU, que surge naturalmente da eliminação Gaussiana, também será realizada a partir do método de Sadosky. Apesar da superioridade da primeira no quesito computacional, o segundo traz duas matrizes L, duas matrizes U e uma ou duas matrizes D, permitindo – de modo altamente simétrico – a fatoração da matriz originária em LU's ou LDU's.
PALAVRAS-CHAVE: Decomposição LU, Sadosky, Interfaces educacionais.

LU/LDU DECOMPOSITION METHOD BASED ON SADOSKY ALGORITHM

ABSTRACT: The research sought to develop a new LU decomposition method based on the Sadosky algorithm and help the engineering students regarding the different techniques applied to the matrices by the construction of graphical interfaces. The LU decomposition, which arises naturally from Gaussian elimination, will also be obtained by Sadosky's method. Despite the superiority of the first in the computational aspect, the second brings two L matrices, two U matrices, and one or two D matrices, allowing – in a highly symmetrical way – the factorization of the original matrix into LU's or LDU's.
KEYWORDS: LU decomposition, Sadosky, Educational interfaces.

1 I INTRODUÇÃO

As matrizes são recorrentes nos problemas da engenharia. Entretanto, ao contrário do que se encontra no aprendizado teórico de tal ente matemático, as dimensões das matrizes relacionadas aos problemas reais são muito grandes. Nesse sentido, aqueles que se farão engenheiros têm de conhecer as propriedades e as operações que podem ser realizadas com e entre as matrizes.

Entretanto, em inúmeras situações, é inviabilizada a solução manual por conta do alto número de operações aritméticas requeridas pelas matrizes. Neste sentido, é natural recorrermos à solução computacional,

que muito agiliza os processos de cálculo e traz, junto de si, certeza e amplitude. Os computadores nada fazem sozinhos, entretanto, quando especificadas as instruções (a partir das linguagens de programação), eles realizam as tarefas com esmero e precisão, até mesmo quando os cálculos abundam.

2 I MATERIAIS E MÉTODOS

Na linha educacional, nos preocupamos em apresentar de maneira amigável ao usuário as inúmeras operações que podem ser realizadas com as matrizes. Segundo (LIMA; SILVA; COSTA, 2016), o ensino a partir das interfaces gráficas se dá de maneira simples e progressiva. As construções que fizemos nos utilizando dessa ferramenta foram duas: uma contendo as operações mais básicas e outra com operações e métodos mais complexos.

Já na linha operacional, voltamo-nos ao desenvolvimento de um método de decomposição LU baseado no método de Sadosky e a sua comparação computacional/operacional com outro método de decomposição LU, presente em (ARENALES; DAREZZO, 2015, p. 32).

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

No quesito educacional, conforme dito anteriormente, buscamos apresentar ao aluno – de modo amigável e intuitivo - os principais métodos e operações que podem ser realizados com as matrizes. Na figura abaixo há um exemplo com a interface das operações mais complexas:

Figura 1 – Cálculo de autovalores e autovetores associados a uma matriz.

O método de decomposição LU por nós desenvolvido se baseia no algoritmo de Sadosky, que se utiliza do cálculo de determinantes de ordem segunda ao invés das operações elementares (BOLDRINI, 1980, p. 35) entre as linhas da matriz, o que torna o processo mais didático.

Agora, apresentaremos o algoritmo desenvolvido: seja $C^{(n)} = A = (a_{ij})_{nxn}$ uma matriz de ordem n. Para calcularmos seu determinante, precisamos definir outras n -1 matrizes. Dado $t \in \mathbb{N}$, com $1 \leq t \leq n - 1$, a t-ésima matriz definida será representada por:

$$C^{(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(t)} & \cdots & \alpha_{1t}^{(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{t1}^{(t)} & \cdots & \alpha_{tt}^{(t)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Onde $\alpha^{(t)}_{ij}$ é definido da seguinte maneira:

$$\alpha_{ij}^{(t)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(t+1)} & \alpha_{12}^{(t+1)} \\ \alpha_{21}^{(t+1)} & \alpha_{22}^{(t+1)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Com 1 ≤ i ≤ t e 1≤ j≤ t.

Definidas as matrizes, o determinante da matriz A é dado por:

$$\det(A) = \frac{(-1)^l c_{11}^{(1)}}{\prod_{k=3}^{n}[c_{11}^{(k)}]^{k-2}} \tag{3}$$

Onde l é o número de alterações entre filas (linhas ou colunas), a fim de que tenhamos $c_{11}^{(k)} \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$, com 3 ≤ k ≤ n.

O método de decomposição LU é dividido em duas partes. Na primeira, obtemos a decomposição LU; e, na segunda, a decomposição LDU.

Primeira parte: seja $C^{(n)} = A = (a_{ij})_{nxn}$, com $a_{11} \neq 0$ uma matriz de ordem n. Calculemos, de maneira idêntica ao método de Sadosky, outras n -1 matrizes, onde $c_{11}^{(t)} \neq 0\ \forall t \in \mathbb{N}$ com 2 ≤ t ≤ n - 1.

Primeiramente, definamos a matriz $L^{(1)}$:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}^{(1)} & l_{22}^{(1)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^{(1)} & l_{n2}^{(1)} & \cdots & l_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Por definição, $\forall i \in \mathbb{N}$ com 1 ≤ i ≤ n, temos que $l_{ii}^{(1)} = 1$.

Vamos percorrer as colunas. Para cada coluna vamos definir dois parâmetros: α e t.

$$\alpha = j - 1 \tag{5}$$

$$t = n - (j - 1) \tag{6}$$

Se $c_{(i-\alpha)1}^{(t)} = c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)} = 0$, então $l_{ij}^{(1)} = 0$, senão:

$$l_{ij}^{(1)} = \frac{c_{(i-\alpha)1}^{(t)}}{c_{11}^{(t)}} = \frac{c_{(i-j+1)1}^{(n+1-j)}}{c_{11}^{(n+1-j)}} \tag{7}$$

Agora, definamos a matriz $U^{(1)}$:

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(1)} & u_{12}^{(1)} & \cdots & u_{1n}^{(1)} \\ 0 & u_{22}^{(1)} & & u_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Para todo j ϵ $\mathbb{N}$ com 1 ≤ j ≤ n, temos que $u_{1j}^{(1)} = a_{1j} = c_{1j}^{(n)}$.

Vamos percorrer as linhas. Para cada linha vamos definir dois parâmetros: α e t.

α = i - 1 (9)

t = n - (i - 1) (10)

Se $c_{1(j-\alpha)}^{(t)}$ = 0, então $u_{ij}^{(1)}$ = 0, senão:

$$u_{ij}^{(1)} = \frac{c_{1(j-\alpha)}^{(t)}}{\prod_{z=n+2-i}^{n} c_{11}^{(z)}} \quad (11)$$

Parte segunda: obteremos, agora, a decomposição LDU. O método não nos fornece diretamente a matriz D, mas sim o produto LD (ou DU). A matriz , entretanto, é facilmente obtida a partir de qualquer um desses produtos.

Primeiramente, definamos a matriz $L^{(2)}$:

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}^{(2)} & l_{22}^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^{(2)} & l_{n2}^{(2)} & \cdots & l_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Temos que $\forall i \, \epsilon \, \mathbb{N}$ com 1 ≤ i ≤ n; $l_{i1}^{(2)} = a_{i1} = c_{i1}^{(n)}$.

Para definirmos os demais elementos, vamos percorrer as colunas da matriz $L^{(2)}$. Para cada coluna vamos definir dois parâmetros: α e t.

α = j - 1 (13)

t = n - (j - 1) (14)

Os demais elementos $l_{ij}^{(2)}$ ficam definidos da seguinte maneira:

Se $c_{(i-\alpha)1}^{(t)}$ = 0, então $l_{ij}^{(2)}$ = 0, senão:

$$l_{ij}^{(2)} = \frac{c_{(i-\alpha)1}^{(t)}}{\prod_{z=n+2-j}^{n} c_{11}^{(z)}} \quad (15)$$

Agora, definamos a matriz $U^{(2)}$:

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} u_{11}^{(2)} & u_{12}^{(2)} & \cdots & u_{1n}^{(2)} \\ 0 & u_{22}^{(2)} & & u_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Temos $u_{ii}^{(2)} = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$.

Para definirmos os demais elementos, vamos percorrer as linhas da matriz $U^{(2)}$. Para cada linha vamos definir dois fatores α e t, onde:

$$\alpha = i - 1 \quad (17)$$

$$t = n - (i - 1) \quad (18)$$

Por fim, os demais elementos $u_{ii}^{(2)}$ ficam definidos por:

Se $c_{1(j-\alpha)}^{(t)} = c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)} = 0$, então $u_{ij}^{(2)} = 0$, senão:

$$u_{ij}^{(2)} = \frac{c_{1(j-\alpha)}^{(t)}}{c_{11}^{(t)}} = \frac{c_{1(j-i+1)}^{(n+1-i)}}{c_{11}^{(n+1-i)}} \quad (19)$$

Se A é singular (det(A) = 0), conseguimos obter somente uma matriz diagonal que satisfaz *A = LDU*. Se A não é singular (det(A) ≠ 0), conseguimos obter duas matrizes diagonais (não necessariamente distintas) que satisfazem a fatoração *A = LDU*.

São duas as possibilidades para a matriz D:

$$A = L^{(1)} D^{(l)} U^{(2)} \quad (20)$$

Ou:

$$A = L^{(2)} D^{(u)} U^{(1)} \quad (21)$$

Se det(A) = 0, então $U^{(1)}$ e $L^{(2)}$ não admitem inversas; conseguimos, portanto, apenas $D^{(l)}$.

Se det(A) ≠ 0, conseguimos $D^{(l)}$ e $D^{(u)}$.

As matrizes diagonais são definidas da seguinte maneira: para todo $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$, temos que:

$$d_{ii}^{(l)} = u_{ii}^{(1)} = l_{ii}^{(2)} \quad (22)$$

$$d_{ii}^{(u)} = \frac{1}{u_{ii}^{(1)}} = \frac{1}{l_{ii}^{(2)}} \tag{23}$$

Para matrizes singulares, evidentemente, definimos apenas (22).

4 I CONCLUSÃO

Compararemos a parte primeira do método de decomposição LU desenvolvido e o método presente em (ARENALES; DAREZZO, 2015, p. 32):

Temos que $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$ com 1 ≤ i, j ≤ n e i ≤ j:

$$l_{ij} = \frac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})}{u_{jj}} \tag{24}$$

E para todo $i, j \in \mathbb{N}\ com\ 1 \le i, j \le n\ e\ i > j$: :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \tag{25}$$
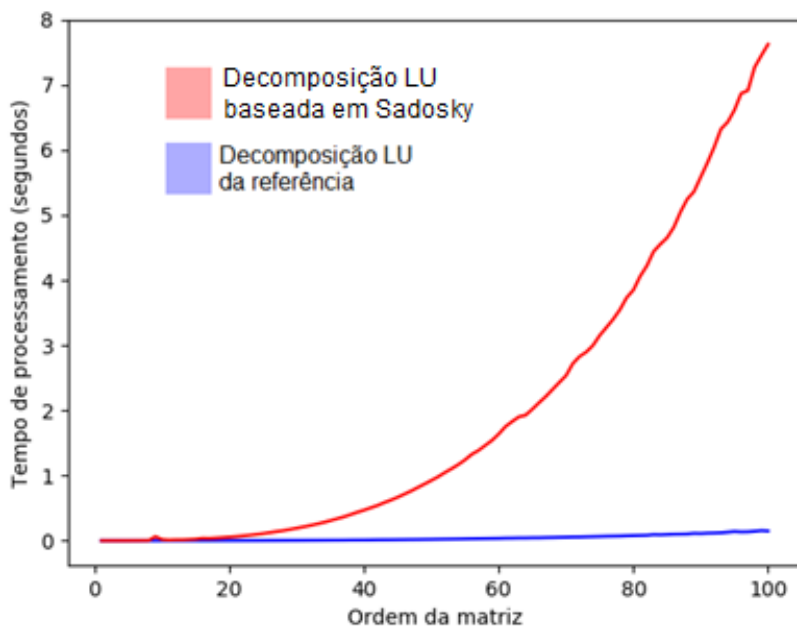
Figura 2 – Gráfico tempo de processamento x ordem da matriz para os métodos de decomposição LU.

O grande poder do nosso método não se mostra no seu desempenho computacional, mas sim em sua força didática, que está edificada sobre dois alicerces: o primeiro é o próprio método de Sadosky, que, por meio do cálculo de determinantes de ordem 2, facilita – didaticamente e não computacionalmente - a eliminação gaussiana; o segundo é a simetria do método na obtenção das matrizes D's e na obtenção do segundo par de matrizes L e U.

REFERÊNCIAS

ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo numérico:** aprendizagem com apoio de software. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. cap. 2, p. 32.

BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. cap. 2, p. 35.

LIMA, J. O.; SILVA, L. M.; COSTA, W. F. **O uso de recursos computacionais com GUI e AUI no ensino**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6799_3103_ID.pdf. Acesso em: 13 ago. 2019.

CAPÍTULO 11

A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA VIVENCIADA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 12/12/2020

Malcus Cassiano Kuhn
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul
Lajeado – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/5545065443812651
http://orcid.org/0000-0002-6001-2324

RESUMO: Este relato, com abordagem qualitativa, apresenta uma experiência vivenciada por meio do desenvolvimento de um projeto de ensino cujo objetivo era a resolução de problemas envolvendo conteúdos que integram o currículo do 1º ano do Ensino Médio. O público alvo foram estudantes de um Curso Técnico em Automação Industrial – Forma Integrada – de um Câmpus de Instituto Federal do Rio Grande do Sul. O projeto esteve alicerçado na Teoria de Aprendizagem Significativa e na metodologia de resolução de problemas, sendo que 10 estudantes participaram de oficinas semanais de 90 minutos para resolução de problemas relacionados aos conteúdos de funções e sequências, no período de setembro a novembro de 2018. Assim, durante os 10 encontros realizados, os estudantes desenvolveram habilidades e competências para a resolução de problemas. Ao longo do projeto foram observadas dificuldades na compreensão dos problemas propostos e a necessidade de construção conjunta de estratégias de resolução, sendo fundamental o papel mediador do professor no projeto.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Ensino Médio, Aprendizagem Significativa.

THE ART OF SOLVE PROBLEMS: AN EXPERIENCE LIVED WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

ABSTRACT: This report, with a qualitative approach, presents an experience lived through the development of a teaching project whose objective was the resolution of problems involving contents that integrate the curriculum of the 1st year of High School. The target audience was students from a Technical Course in Industrial Automation - Integrated Form - from a Campus of the Federal Institute of Rio Grande do Sul. The project was based on the Theory of Meaningful Learning and on the methodology of problem resolution, with 10 students participating weekly 90-minute workshops for solving problems related to the content of functions and sequences, from September to November 2018. Thus, during the 10 meetings held, students developed skills and competencies for problem resolution. Throughout the project, difficulties in understanding the proposed problems and the need for joint construction of resolution strategies were observed, with the mediating role of the teacher in the project being fundamental.

KEYWORDS: Mathematics Education, Problems Resolution, High School, Meaningful Learning.

1 | INTRODUÇÃO

Em 2018, o Câmpus Lajeado do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense – IFSul passou a ofertar duas turmas do Curso Técnico em Automação Industrial – Forma Integrada ao Ensino Médio, totalizando 64 matrículas. Ao finalizar o primeiro semestre de aulas, identificou-se que os estudantes apresentavam dificuldades na resolução de problemas, não só em Matemática, mas também em outras disciplinas da área de Ciências Exatas. Diante desse contexto se propôs o projeto de ensino, *A arte de resolver de problemas*, para desenvolver essa habilidade e competência com os estudantes do 1º ano do referido curso.

Este trabalho é um estudo qualitativo, fundamentado na Teoria de Aprendizagem Significativa e na metodologia de resolução de problemas, com o objetivo de relatar uma experiência vivenciada por meio do desenvolvimento do projeto de ensino, *A arte de resolver problemas*, cujo propósito era a resolução de problemas envolvendo conteúdos que integram o currículo do 1º ano do Ensino Médio. O projeto foi desenvolvido através de 10 oficinas semanais de 90 minutos, para resolução de problemas relacionados aos conteúdos de funções e sequências, no período de setembro a novembro de 2018, conforme apresentação feita na sequência.

2 | A TEORIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Conforme Moreira (1999) a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) ou Teoria da Assimilação de Ausubel é uma teoria cognitivista e construtivista que propõe explicar o processo de aprendizagem que ocorre na mente humana, através da organização e integração do material de aprendizagem na estrutura cognitiva. A TAS considera necessárias duas condições para que a aprendizagem ocorra de forma significativa: a disposição do estudante para aprender e o material didático desenvolvido deve ser potencialmente significativo para o estudante, além de ser construído a partir dos seus conhecimentos prévios.

> Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos. (MOREIRA, 1999, p. 152).

Para Moreira e Masini (2001), o aprendizado abrange conceitos novos e também modificações na estrutura cognitiva representada pela interação entre conhecimentos assimilados e os conhecimentos pré-existentes dos estudantes. A esse conhecimento prévio, que sofre interação com o novo conhecimento aprendido, Ausubel dá o nome de *subsunçor*. A aprendizagem ocorre quando uma nova ideia ou conceito ancora-se em conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Ausubel considera o armazenamento de

informações na mente humana como sendo hierarquicamente organizado, resultado de experiências sensoriais do indivíduo. Pensando-se em estimativas numéricas, por exemplo, se o estudante sabe qual o consumo mensal de água da sua família, este conceito serviria de subsunçor para fazer uma estimativa numérica de consumo de água de seu município, de seu estado ou país.

O processo de ancoragem é o aspecto fundamental da teoria de Ausubel. De acordo com Moreira e Masini (2001), novas ideias se relacionam com o que o estudante já sabe e com isso surgem novos significados. No entanto, para que isso ocorra, a relação dessas novas ideias com o conhecimento prévio do estudante deve se dar de modo substantivo e não arbitrário, ou seja, um novo conhecimento não será alocado de modo arbitrário na estrutura cognitiva, ele estará interligado com o conhecimento âncora, como se fosse uma continuação e, além disso, que o estudante consiga resolver problemas com pequenas variações comparando-se com aqueles que lhe foi apresentado, ou ainda, o estudante que aprende um conteúdo de modo substantivo, será capaz de compreender casos cujas estruturas sejam diferentes da forma como foi assimilado, sendo capaz de aplicar o conhecimento para outras situações.

Ausubel considera também que, para que a aprendizagem seja significativa, o material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo. Ou seja, tenha significado para o estudante e que o estudante manifeste disposição favorável para aprender de maneira significativa. Para que isto ocorra, recomenda o uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente (MOREIRA; MASINI, 2001). Os organizadores prévios são materiais apresentados aos estudantes antes do próprio conteúdo a ser aprendido, como por exemplo, um experimento, uma imagem, um texto introdutório ou questionamentos, buscando instigar o estudante a compreender o conteúdo. É uma estratégia que se pode utilizar para manipular a estrutura cognitiva criando elos entre o conhecimento prévio e o conteúdo a ser aprendido, ou seja, busca mostrar ao estudante a relação entre o conteúdo e o seu conhecimento prévio. Ausubel recomenda o uso de problemas para se procurar evidências da aprendizagem significativa, porém alerta que resolver problemas envolve habilidades que muitas vezes estão além dos conteúdos trabalhados.

Dessa forma, a aprendizagem significativa se torna importante, pois o conhecimento é retido por mais tempo pelo estudante, a aprendizagem é facilitada e, além disso, o conceito que foi aprendido e esquecido pode ser relembrado com mais facilidade. Nesse contexto, o papel do professor seria identificar o que o estudante já sabe organizar no conteúdo a ser aprendido de modo que trabalhe primeiramente os conceitos mais inclusivos, com maior subsunção com o conhecimento prévio do estudante, e utilizar recursos adequados, para que a aprendizagem seja significativa.

3 I A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Numa sociedade que demanda por profissionais mais críticos, autônomos e criativos, a Matemática e as outras Ciências podem dar sua contribuição, à medida que se utilizem "metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade de enfrentar desafios". (BRASIL, 1998, p. 27).

A resolução de problemas pode contribuir na formação de cidadãos mais autônomos e críticos, à medida que o estudante se torna agente de sua própria aprendizagem, criando seus métodos e estratégias de resolução, em contrapartida a metodologias mais tradicionais, onde predomina a memorização e mecanização.

Os sistemas nacionais de avaliação da educação básica, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), junto com os sistemas de avaliação internacional como o *Programme for International Student Assessment* (Pisa), cada vez mais têm exigido dos estudantes a competência para resolução de problemas, e não somente em Matemática.

O Enem, por exemplo, traz em sua matriz de referência, no eixo cognitivo, comum a todas as áreas de conhecimento, que o estudante deve enfrentar situações-problema, ou seja, selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema. Acrescenta-se que:

> A resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio como intuição, dedução e estimativa (BRASIL, 2008, p. 129).

A resolução de problemas, como eixo organizador dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática, pode ser resumida nos seguintes princípios, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998):

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada; aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática; um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;

> a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1998, p. 40-41).

Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos estudantes não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. O que é problema para um estudante pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe. Resolver um problema pressupõe que o estudante: "elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros estudantes; valide seus procedimentos". (BRASIL, 1998, p. 41).

O fato de o estudante ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos (que admitem diferentes respostas em função de certas condições), evidencia uma concepção de ensino e de aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998).

Dante (2000) assinala o trabalho com resolução de problemas como a principal forma de se alcançar os objetivos em sala de aula, entre eles, o de fazer o estudante pensar produtivamente. Acrescenta que, por meio da resolução de problemas, é possível desenvolver, no estudante, a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade, a independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu cotidiano. O autor destaca ainda:

> Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária (DANTE, 2000, p. 15).

Dante (2000) também sugere que devemos propor aos estudantes várias estratégias de resolução de problemas, mostrando-lhes que não existe uma única estratégia, ideal e infalível. Cada problema exige uma determinada estratégia. A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos estudantes diante

de um problema novo. Dessa forma, em sala de aula o professor pode trabalhar com as tentativas e os erros dos estudantes, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o raciocínio dos estudantes e preparar as discussões em torno da resolução desses problemas, com o intuito de conceber processos de resolução diferentes dos já aprendidos.

Segundo Polya (1978), o professor que deseja desenvolver nos estudantes o espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes oportunidades de imitar e praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os estudantes. Por meio dessa orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer. Para resolver e encaminhar a solução de um problema, segundo Polya (1978), quatro etapas principais podem ser empregadas: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução de uma estratégia escolhida e revisão da solução.

Quando o professor adota a metodologia da resolução de problemas, seu papel será de incentivador, facilitador, mediador das ideias apresentadas pelos estudantes, de modo que estas sejam produtivas, levando os estudantes a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos. Deve criar um ambiente de cooperação, busca, exploração e descoberta, deixando claro que o mais importante é o processo e não o tempo gasto para resolvê-lo ou a resposta final. O professor deve propor situações-problema que possibilitem a produção do conhecimento, onde o estudante deve participar ativamente compartilhando resultados, analisando reflexões e respostas, enfim aprendendo a aprender.

4 I O PROJETO DE ENSINO *A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS*

Diante das exigências profissionais da sociedade, das dificuldades apresentadas pelos estudantes do Ensino Médio na resolução de problemas, das orientações propostas nos documentos legais que norteiam a Educação Básica (PCN e Base Nacional Comum Curricular – BNCC, por exemplo) e das competências exigidas nos sistemas de avaliação nacional e internacional (Enem e Pisa, por exemplo), propôs-se o projeto de ensino *A arte de resolver problemas* para desenvolver habilidades e competências para resolução de problemas.

O objetivo geral do projeto de ensino foi potencializar a metodologia de resolução de problemas na construção de conhecimentos matemáticos por estudantes do 1º ano do Curso Técnico em Automação Industrial – Forma Integrada. E os objetivos específicos do projeto foram: pesquisar sobre a metodologia de resolução de problemas; resolver problemas relacionados aos conteúdos de função afim, função quadrática, função modular,

função exponencial, função logarítmica, sequências, progressão aritmética e progressão geométrica.

O projeto de ensino *A arte de resolver problemas* teve sua vigência de agosto a novembro de 2018, período em que se desenvolveu um conjunto de etapas para atingir o propósito do projeto, conforme segue:

Etapa 1: No mês de agosto se fez a divulgação do projeto de ensino para os estudantes das duas turmas de 1º ano do Curso Técnico em Automação Industrial – Forma Integrada e foram recebidas as inscrições dos estudantes interessados em participar do projeto de ensino *A arte de resolver problemas.*

Etapa 2: No mês de agosto se realizou pesquisa sobre a metodologia de resolução de problemas em referências que abordam a temática.

Etapa 3: A partir da pesquisa realizada, nos meses de agosto, setembro e outubro se fez a elaboração de problemas envolvendo os conteúdos de funções e sequências, que foram resolvidos pelos estudantes nas oficinas.

Etapa 4: Nos meses de setembro, outubro e novembro foram realizadas oficinas semanais de 90 minutos para resolução de problemas relacionados aos conteúdos de funções e sequências, totalizando dez oficinas.

Etapa 5: No mês de novembro se fez a elaboração e o encaminhamento do relatório final do projeto de ensino.

Em cada oficina realizada foi proposta a resolução de problemas relacionados a conteúdos desenvolvidos no 1º ano do Ensino Médio, conforme descrito no **Quadro 1:**

1ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções de 1º grau e funções de 2º grau.
2ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções de 1º grau e funções de 2º grau.
3ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções modulares.
4ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções exponenciais.
5ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções logarítmicas.
6ª oficina	Resolução de problemas envolvendo funções.
7ª oficina	Resolução de problemas envolvendo sequências.
8ª oficina	Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas (P.A.) e progressões geométricas (P.G.).
9ª oficina	Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas (P.A.) e progressões geométricas (P.G.).
10ª oficina	Resolução de problemas envolvendo raciocínio lógico.

Quadro 1 – Cronograma das oficinas de resolução de problemas.

Fonte: Projeto de Ensino *A Arte de Resolver Problemas*.

As oficinas foram realizadas em quartas-feiras, no horário das 10h30min às 12h, fora do horário regular de aulas do Curso Técnico em Automação Industrial, permitindo que os estudantes dos dois turnos pudessem participar desse projeto de ensino. Os 10 estudantes inscritos participaram de todo projeto, sendo sete do sexo masculino e três do sexo feminino, oito estudantes do turno da manhã e dois do turno da tarde.

A metodologia das oficinas se constituiu pela resolução de problemas relacionados aos conteúdos de função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, sequências, progressão aritmética e progressão geométrica, conforme cronograma apresentado no Quadro 1. As oficinas foram desenvolvidas pelo professor coordenador do projeto de ensino, licenciado em Matemática, especialista em Pedagogia Gestora, Mestre em Ensino de Ciências e Matemática e Doutor em Ensino de Ciências e Matemática, com 20 anos de experiência docente em diferentes níveis de ensino.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo da Teoria de Aprendizagem Significativa e da metodologia de resolução de problemas, abordou-se um projeto de ensino sobre resolução de problemas, desenvolvido com 10 estudantes do 1º ano do Curso Técnico em Automação Industrial – Forma Integrada ao Ensino Médio –, ofertado no Câmpus Lajeado do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense, no período de setembro a novembro de 2018.

Durante as 10 oficinas realizadas, os estudantes resolveram problemas relacionados aos conteúdos de função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, sequências, progressão aritmética e progressão geométrica. Assim, os estudantes desenvolveram habilidades e competências para a resolução de problemas, destacando-se dificuldades na compreensão dos problemas propostos e a necessidade de construção conjunta de estratégias de resolução, sendo fundamental o papel mediador do professor no projeto. Apesar das dificuldades, observaram-se a evolução dos estudantes ao longo do projeto e a melhora de seu desempenho nas aulas do Curso Técnico em Automação Industrial.

Acrescenta-se que para o desenvolvimento da metodologia de resolução de problemas foi necessário re-significar conhecimentos matemáticos estudados durante o 1º ano do Ensino Médio, pois alguns conceitos não estavam bem compreendidos, como por exemplo: função exponencial e função logarítmica. Com o desenvolvimento desse projeto de ensino, a partir da resolução de problemas, espera-se ter promovido uma aprendizagem mais significativa com os estudantes envolvidos.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos à Pró-Reitoria de Ensino do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia e Sul-rio-grandense – IFSul pelo apoio, por meio do Edital PROEN Nº 14/2018.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE - Plano de Desenvolvimento da Educação**: SAEB: Ensino Médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB, Inep, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática.** 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa:** A teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

CAPÍTULO 12

ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI SUBMETIDA A IMPACTO NO CENTRO APÓS QUEDA LIVRE ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 04/12/2020

Bruno Conti Franco
Instituto Federal do Rio Grande do Sul – IFRS, Campus Ibirubá, Departamento de Mecânica
Ibirubá – RS
http://lattes.cnpq.br/8687392924213802

Wang Chong
Universidade Federal do Paraná – UFPR, Departamento de Engenharia Mecânica
Curitiba - PR
http://lattes.cnpq.br/3721096641255364

RESUMO: O presente trabalho apresenta um algoritmo para modelar a vibração de uma barra em queda livre submetida a um impacto no centro, pelo Método de Diferenças Finitas centrada (MDF). Com base no MDF, discretizamos a equação geral do movimento da viga de Euler-Bernoulli, considerando as condições iniciais e de contorno e obtendo a solução numérica de deslocamento e momento de flexão de uma barra em função do tempo. Sob as mesmas condições, realizamos uma simulação no software ANSYS LS. Comparando os resultados do MDF com o ANSYS, não houve diferenças significativas, confirmando que o algorítmo desenvolvido nesse trabalho é confiável e pode ser usado para análises de propagação de trinca dinâmica no futuro.

PALAVRAS-CHAVE: Análise dinâmica, Viga de Euler-Bernoulli, Método de Diferenças Finitas, ANSYS – LS, Elementos Finitos.

ANALYSIS OF MOVEMENT OF EULER-BERNOULLI BEAM SUBJECTED TO AN IMPACT AT THE BEAM CENTER AFTER FREE DROPPING THROUGH FINITE-DIFFERENCE METHOD

ABSTRACT: The aim of this work is to develop finite difference algorithm in order to model the vibration of a bar subjected to an impact at the bar center, simulating freely dropping. Based on by Centered Finite Difference Method (CFDM), we has discretized the general movement equation of the Euler-Bernoulli beam with the consideration of initial and boundary conditions and obtained numerical solutions of displacement and bending moment of the bar in terms of time. We also have carried out the same modeling by using the software ANSYS LS. Comparing the results from the CFDM with the one from the ANSYS, we find no significant differences between them and confirm that the algorithm developed in this work is credible, which can be used for the analysis of the crack dynamic propagation in future.

KEYWORDS: Shock, Euler-Bernoulli beam, Numerical solution, Centered Finite Difference Method.

1 I INTRODUÇÃO

O Brasil é hoje um dos maiores produtores de minério de ferro do mundo. A extração é realizada em diversas etapas, as principais são a lavra, a britagem e a moagem. A moagem é a operação de fragmentação fina, após essa etapa o minério está pronto para ser utilizado em outros processos industriais. O

equipamento mais comum nesse processo é o moinho de Barras, nele a moagem ocorre pelo impacto entre as barras de aço (Figura 1) e as pedras de minério. Essas máquinas apresentam elevado custo de manutenção devido a constante quebra das barras internas, por causa dos esforços causados pelo choque com as pedras de minério.

Para reduzir o custo de manutenção do equipamento, é necessário análise matemática de mecânica da fratura na barra. O impacto entre as pedras e as barras dificulta a modelagem matemática, por que a propagação de trinca induzida por impacto é complexa e difícil de ser modelada matematicamente.
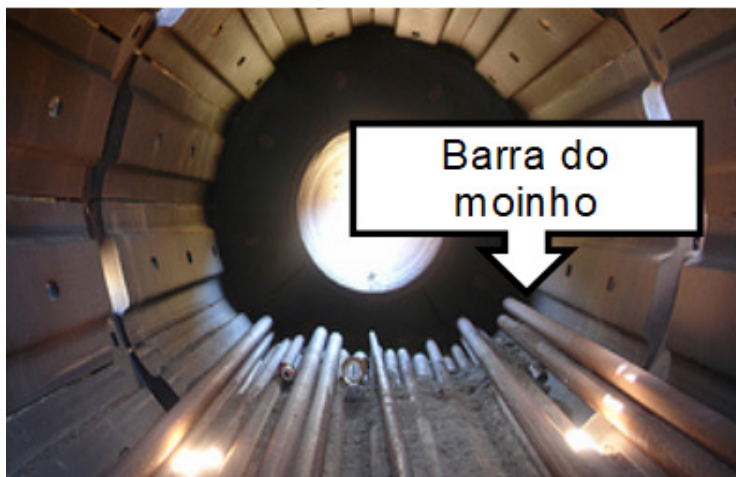
Figura 1: Unidade de processamento de um moinho de Barras

O movimento transversal de vigas tem sido amplamente estudado com vários trabalhos publicados sobre esse assunto. Em estudo apresentado por Kim K. e Kim J. (2000), sobre o efeito de uma trinca na estabilidade dinâmica de uma viga de Timoshenko, com extremidades livre submetida a uma força constante ou intermitente, as frequências naturais e os módulos de vibração transversal foram obtidos pelos métodos de elementos finitos e das escalas múltiplas. Na mesma linha, Kisa e Gurel (2007) desenvolveram uma técnica numérica para análise de vibrações de vigas de seção transversal circular contendo trincas, porém também é utilizado o método de elementos finitos.

O método numérico mais usado para o estudo da propagação dinâmica de trinca é o Método de Elementos Finitos (MEF). Atualmente os principais softwares comerciais como ANSYS e ABAQUES apresentam custo elevado e exigem alto nível de treinamento para os usuários, e ainda não são capazes de analisar propagação dinâmica de trinca causada por impacto. Por outro lado o MDF é um método numérico simples de fácil aplicação e muito utilizado em pesquisas científicas.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo de diferenças finitas para modelar a vibração de uma barra do moinho de barras submetida a impacto. Esse algoritmo pode ser aplicado para análise da propagação dinâmica de trinca em trabalhos futuros.

2 | FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Equação governante

Considera-se o choque de uma viga uniforme, na metade de seu comprimento, com um suporte rígido após queda livre. A teoria clássica de Euler-Bernoulli ou da flexão pura considera vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. Nesse modelo não é considerado a deformação por cisalhamento presente nas seções transversais. Para essas vigas o interesse de estudo são as ações de movimento chamadas de ações de flexão, conforme mostra Figura 2. Segundo Rao (2011), a equação geral para a vibração lateral forçada de uma viga uniforme é dada por:

$$\frac{\partial^2 M(\varsigma,t)}{L^2\partial\varsigma^2}+\rho A\frac{\partial^2 w(\varsigma,t)}{\partial t^2}=f(\varsigma,t) \quad \text{com } \varsigma=\frac{x}{L},\ 0\le\zeta\le1 \tag{1}$$

onde M é o momento fletor, L é a metade do comprimento total da barra (devido a simetria), t é o tempo, p é a densidade do material, A é a área da seção transversal, w é o deslocamento transversal, f(ς, t) é a força corporal externa [N/m] e x é a posição no eixo longitudinal adimensionalizado por ς.
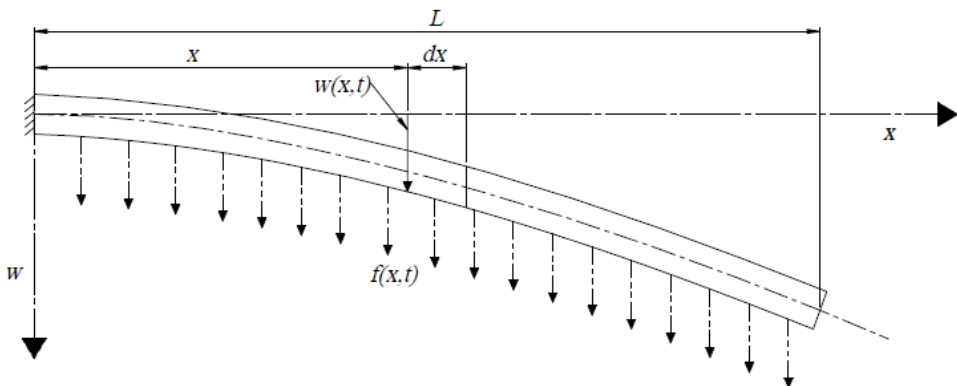
Figura 2: Flexão transversal

A viga é discretizada uniformemente em n+1 pontos, a distância entre cada ponto é chamado de passo h=1/n, um valor adimensional, representado na Figura 3.

Figura 3: Malha

A expressão $\partial^2 M / L^2 \partial\varsigma^2$ na Equação (1), corresponde à segunda derivada de *M* sobre *x*, pode ser representada pela fórmula de diferenças finitas centrada:

$$\frac{\partial^2 M_i^j}{L^2\partial\varsigma^2} = EI\frac{\partial^4 w_i^j}{L^4\partial\varsigma^4} = \frac{E}{L^4h^4}(I_{i+1}^j\left[w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j\right] - 2I_i^j\left[w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j\right] + $$
$$+ I_{i-1}^j\left[w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j\right]) \quad (2)$$

Com l ≤ i ≤ n e l ≤ j ≤ m, onde I é o momento de inércia, *m* o número de incrementos temporal e utilizando-se da seguinte relação:

$$M(x,t) = EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

Ou seja

$$M_i^j = M(\varsigma_i, t^j) = EI\frac{\partial^2 w(\varsigma_i, t^j)}{L^2\partial\varsigma^2} = \frac{EI}{L^2h^2}(w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \quad (4)$$

A expressão $\partial^2 w(\varsigma L, t)/\partial t^2$ corresponde à aceleração. Para calculá-la utilizamos a fórmula de movimento linear de um ponto material considerando aceleração como constante com incremento temporal muito curto: $\Delta t = t^j - t^{j-1}$, j = 1, 2, ..., m. Assim, pela relação:

$$\Delta s = v\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \quad (5)$$

Obtêm-se:

$$a = \frac{2(\Delta s - v\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (6)$$

Na forma dicretizada:

$$a_i^{j-1} = \frac{2(\Delta s_i - v_i^{j-1}\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (7)$$

Substituindo $\Delta s_i = w_i^j - w_i^{j-1}$, então, temos:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(\varsigma_i, t^j)}{\partial t^2} = \frac{2\rho A}{\Delta t^2}\left(w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1}\Delta t\right) \quad (8)$$

Substituindo as Equações (2) e (8) na Equação (1) e $f(\varsigma, t) = \rho$ Ag, temos:

$$\frac{E}{L^4 h^4}\left(I_{i+1}^j\left[w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j\right] - 2I_i^j\left[w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j\right] + I_{i-1}^j\left[w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j\right]\right) +$$
$$+\frac{2\rho A}{\Delta t^2}\left(w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1}\Delta t\right) = \rho A g \quad (9)$$

Após obter w_i^j, pode-se calcular α_i^{j-1} pela Equação (7) e em seguida:

$$v_i^j = v_i^{j-1} + \alpha_i^{j-1}\,\Delta t \quad (10)$$

2.2 Condições Iniciais

A primeira condição inicial é dada por $w(x,0) = w(\varsigma,0) = 0$, assim temos $w_i^0 = 0$. A outra condição inicial é a velocidade inicial da barra no momento em que toca o minério de ferro, dada por quada livre de altura H:

$$v_i^0 = \sqrt{2gH} \quad (11)$$

2.3 Condições de contorno

Conforme a Figura 2, a barra encontra-se com uma extremidade engastada e a outra livre assim tem duas condições de contorno em cada extremidade.

Na extremidade engastada ($x = \varsigma L$ = 0 ou i = 0), a deflexão é $w(0,t^j) = 0$ e a inclinação é dada por $\partial w(0,t^j)/\partial x = (w_1^j - w_{-1}^j)/2h = 0$, então, as condições de contorno para deflexão e inclinação são respectivamente:

$$w_0^j = 0 \quad (12)$$

e

$$w_{-1}^j = 0 \quad (13)$$

Na extremidade livre ($\varsigma = 1$ ou $i = n$), temos o momento: $EI(1)\frac{\partial^2 w(1,t^j)}{L^2 \partial \varsigma^2} = 0$. Isto é pela Equação (4):

$$w_{n+1}^{j} = -w_{n-1}^{j} + 2w_{n}^{j} \tag{14}$$

Pela força cortante: $\frac{\partial}{L\partial\varsigma}\left(EI(1)\frac{\partial^2 w(1,t^j)}{L^2\partial\varsigma^2}\right)$ = 0, temos:

$$w_{n+2}^{j} = w_{n-2}^{j} - 4w_{n-1}^{j} + 4w_{n}^{j} \tag{15}$$

2.4 Matriz dos coeficientes de deslocamento

A resolução das equações do sistema linear para o cálculo dos coeficientes de deslocamentos é realizada através das matrizes:

$$\begin{pmatrix} (7\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & & & \\ -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & & \\ +\alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & & \\ 0 & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & & \\ 0 & 0 & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & & \cdots & \alpha & -4\alpha & (6\alpha+\beta) & -4\alpha & \alpha \\ & & & & & & & \cdots & 0 & \alpha & -4\alpha & (5\alpha+\beta) & -2\alpha \\ & & & & & & & \cdots & 0 & 0 & 2\alpha & -4\alpha & (2\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \\ w_5^j \\ \vdots \\ w_{n-2}^j \\ w_{n-1}^j \\ w_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^j \\ \gamma_2^j \\ \gamma_3^j \\ \gamma_4^j \\ \gamma_5^j \\ \vdots \\ \gamma_{n-2}^j \\ \gamma_{n-1}^j \\ \gamma_n^j \end{pmatrix} \tag{16}$$

onde $\alpha = \frac{EI}{L^4 h^4}$, $\beta = \frac{2\rho A}{\Delta t^2}$ e $\gamma_i^j = \rho A\left(g + \frac{2v_i^{j-1}}{\Delta t}\right)$.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os dados de entrada estão listados na Tabela 1.

Parâmetro	Valor
Módulo de Elasticidade (E)	180 GPa
Raio (R)	0.0508 m
Comprimento da metade da barra (L)	2.21 m
Densidade (p)	7850 Kg/m³
Altura da queda (H)	6.096 m
Intervalo de tempo (Δt)	1 μs
Número de discretização (n)	221

Tabela 1 – Dados de entrada para as simulações

A simulação foi realizada pelo Matlab. Para comparação, usou-se o software ANSYS Mechanical APDL 12.0.1, no módulo LS-DYNA. O elemento selecionado foi o BEAM161, configurado para seção transversal circular.

A figura 4 mostra a comparação dos resultados do deslocamento transversal do último nó da barra, i = n. Os resultados obtidos pelo MDF e pelo ANSYS são quase idênticos. Isso confirma que o algoritmo desenvolvido é confiável.
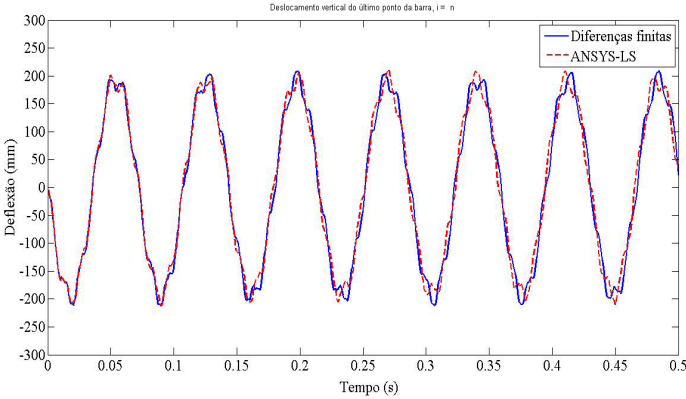
Figura 4 – Deslocamento no último nó da barra i = n, tempo de 0 a 0.5 s.

A Figura 5 apresenta o momento fletor máximo na barra e o ponto em que ele ocorre. O pico entre 1700 e 1800 µs pode ser interpretado, como dois locais (a 8% e a 50% do comprimento) na viga onde os momentos fletores são quase idênticos e máximos no instante 1707 µs, ou seja, as tensões máximas poderão ocorrer nestes dois lugares no mesmo instante de tempo. Isto implica que a barra poderá ser quebrada nestes lugares.
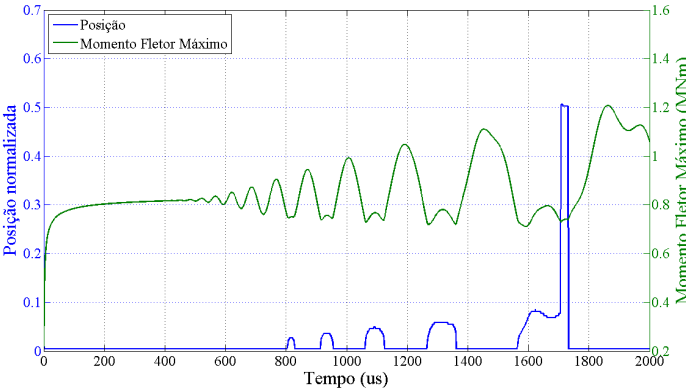
Figura 5 – Posição de Momento Máximo vs Tempo.

4 I CONCLUSÃO

A análise dinâmica do efeito de choque em uma estrutura em geral é complexa. O desenvolvimento do programa baseado no MEF para esse fim requer alto nível de conhecimento em MEF. O uso de software comercial representa elevado custo financeiro e de treinamento. O algoritmo desenvolvido baseado no MDF para análise da viga de Euler-Bernoulli é eficiente e confiável, mas relativamente simples em relação ao MEF. Pelo programa desenvolvido, pode-se obter os perfis de deslocamento, velocidade e aceleração da viga em qualquer instante e em qualquer ponto da viga. Analisando os resultados obtidos, é possível perceber mais de um local na viga onde poderá ocorrer mesma tensão máxima no mesmo instante de tempo. Isso revela que a barra pode ser quebrada em pedaços. O algoritmo desenvolvido poderá ser utilizado em trabalhos futuros para análise de propagação de trinca provocado por choque.

REFERÊNCIAS

Kim, K. -H. and Kim, J.-H., **Effect of a crack on the dynamic stability of a free-free beam subjected to a follower force**, Journal of Sound and Vibration, vol 1, 119-135, (2000).

Kisa, M. and Gurel, M. A., **Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections**, International Journal of Engineering Science, vol 1, 364-380, (2007).

RAO S. S., **Mechanical Vibrations**, Pearson PRENTICE Hall, vol. 5, (2011).

CAPÍTULO 13

COMMENTS ON THE PERCEPTION OF THE STUDENTS AND TEACHER IN A MATHEMATICAL MODELING DISCIPLINE IN AN ENVIRONMENTAL SCIENCES GRADUATION – A REMOTE EDUCATION EXPERIENCE

Data de aceite: 01/03/2021

Tales Alexandre Aversi Ferreira
Laboratory of Biomathematics, Instituto de Ciências Biomédicas, UNIFAL (Universidade Federal de Alfenas), Alfenas, MG, Brasil

ABSTRACT: The teaching of mathematics with quality, generating learning, is a challenge for modern pedagogy. The new teaching technologies are hardly finding space within a structure that is rooted in the old processes proven insufficient to teach properly. The problem in learning mathematics comes from the base and seems to continue in the student's life without a continuity solution until appearing in graduate school, where the need to apply mathematical reasoning is imperative for the production of knowledge in the many fields and more specifically in research that needs of a logical basis. Mathematical modeling seems to be a more efficient proposal to enable the undergraduate and graduate students to meet the need for the practical application of mathematics in research and real cases. At this time, when the student is forced to learn for himself due to social isolation, there is a great opportunity for researchers of the pedagogy to verify the benefits of active methodologies in which mathematical modeling and problem solving are part. In this chapter, we begin with comments on mathematical education and continue to associate it with mathematical modeling with an emphasis on undergraduate and graduate studies, as examples in show the need of the student's situation in relation to mathematical reasoning. In this sense, we analyze a real case and make general comments as an example of learning problems, data that are corroborated by other studies at various levels of education.

KEYWORDS: Mathematics teaching, Mathematical Modeling, Problems Solving, Academic Education, Active Methodologies.

1 I INTRODUCTION

The difficulties to teaching mathematics adequately, i.e., to make easier for teaching students is a challenge not yet overcome by teachers. That is a capital subject the involves educators, teachers directly and the society indirectly. The new purposes for teaching were not completely implanted and must be tested and tried in many levels of students live. Probably, the more significative problem to teaching using the new technologies for teaching is in the academy and graduation because very usually the pupils arrive without enough knowledge about the mathematical basis. This situation is worst for no exacts courses in order. In a tentative to close the mathematical basis reasoning for graduation students a discipline of mathematical model was purposed for an Environmental Sciences Graduation.

The goal was to give to students a material for help them use the mathematical

models for dissertations/thesis. Some students come from biological courses, others from biotechnology, environmental engineer, therefore, they presented different mathematical knowledge and a challenge for the teacher.

An unexpected fact was the necessity of the stop the presential discipline and after to continue in a remote education system, then the experience become more difficult for a side, however, more thought-provoking on the other.

The purpose of this work, was to analysis the use of the Mathematical Modeling methodology in a discipline of the Mathematical Modeling Applied for Environmental and Biological Sciences, offered in an Environmental Sciences graduation (MSc and PhD) course in a tentative to development cognitive abilities, favoring the reflection and questioning into the Mathematical Modeling, a critical reasoning (Lupinacci and Botin, 2004) and provide to students to obtain their own knowledge (Ferreira, Silva, Nunes, 2015), which are useful skills for future scientists.

In this experience relate, students and teacher told your perceptions about the discipline of Mathematical Model with partial use of the active methodology and remote learning with intention to contribute for mathematical education experience from both view from teacher and students

2 | SOME COMMENTS ABOUT THE MATHEMATICAL EDUCATION

Educational methods of teaching have been studied by mathematicians for a long time (Alves and Aversi-Ferreira, 2019) and used by others exact and no exact fields, sometimes because the absence or scarce studies in didactic purposes in those areas.

The concerning about the mathematical education led the pedagogic researchers to search for the elderly philosophy conceptions as the Plato, Aristoteles, Kant and/or Descartes (Machado, 1987; Piaget and Beth, 1980), as bases for the use of new technologies, problems solving, math modeling, teaching of history of mathematics (D´Ambrósio, 2008), since the Middle Age, that were and hodiern are tested in the practical teaching (D´Ambrósio, 1998; Biembengut, 2014).

A study of the classic works could generate an understanding of the causes of the modern methods of education (Nosella, 2004).

Specifically, both, Solving Problems and Mathematical Modeling are intimately linked, because the solution of a problem must use a creation of a modeling for math language (Faccin, 2015).

For instance, one of the purposes for improve the mathematical teaching, as Solving Problems, is innate from human nature (Caon and Cardona, 2015; Rodrigues and Magalhaes, 2012) as demonstrated by history of Chinese, Egyptians, Greeks (Stanic and Kilpatrick; 1989) as observed in the Hind Papyrus, Moscow Papirus (Disperati, 2015), trigonometric problems in the clay tablet known as Plimpton 322 confectioned by Babylonians (Mansfield and Widberg, 2017).

From the Greeks we obtained the heritage of the heuristics steps for the problems solving as 1) task, 2) indication, 3) thesis, 4) construction, 5) demonstration and 6) conclusion, that is a still used method (Groenwald et al., 2004).

Following the reasoning, the mathematics became the base for exact sciences, collaborating, inter alia, with the language, descriptive analysis, modeling and simulation, providing the tools for more trustworthy projects (Onuchic, 2012).

However, it is important separate the epistemology of the Mathematics Sciences and Mathematical Education, because the last one is not an exact science, it is empiric and multidisciplinary and the objective is more social, pedagogical, i.e., the student learning (Onuchic, 2012).

Into the studies of the Mathematical Education, a proposal for perform the mathematics teaching is the use of modern methodologies, in a tentative to do the mathematics pedagogy as a tool to generate appropriated knowledge for different students (Onuchic, 2012).

Historic approach indicates the long time that educational researchers have studied changes for the mathematics teaching, although the conservatism education has prevailed, putatively because the difficulty in changing ingrained behaviors (Alves and Aversi-Ferreira, 2019).

Indeed, a common and hodiern problem is that despite of research and reflections about mathematic teaching, the new methodologies of the Mathematical Education are not yet applied in classes frequently and satisfactorily, where the traditional principles still remain, at least, in Brazil (Rodrigues and Magalhaes, 2012; Groenwald et al., 2004).

In fact, the new methodologies are used scarcely in the teaching (Groenwald et al., 2004); in many countries this situation have occurred into a same convergence points, but topics to modify this situation has been purposed as the use of the 1) problems resolution, 2) quotidian mathematics and 3) math problems found in other disciplines; these ideas are also cited in Brazil by the National Curricular Parameters in Brazil (Brasil, 1998).

Furthermore, the purpose of the use of the Mathematical Education is, in the context for students, to purpose the use the think critically (Lupinacci and Botin, 2004), with the objectives of: 1) improve the investigation methods, 2) elaboration of the complex thinking process, 3) catenation of ideas using math and logical proceedings; generating, at least the critical thinking, for comprehension of the hypothesis formulation and generalization (Groenwald et al., 2004).

These are purposes for became the students the author of own knowledge that is the base of the Active Methodologies.

In this way, for instance, the new purposes do not match with the use of long lists of exercises (Ferreira, Silva, Nunes, 2015), as preconized by the method of the mental discipline theory (Groenwald et al., 2004), that is usual but based in a conservative teaching far from the modern society needs (Ferraz, 1983).

Many Mathematic Education methodologies are unknown by most of educators (Groenwald et al., 2004), and students; in fact, these methodologies are difficult to be understood efficiently (Stanic and Kilpatrick,1989) by teachers of the math and correlated fields (Alvces and Aversi-Ferreira, 2019).

It is very knowledge that most of students present difficult in learning mathematics in classroom, because, inter alia, and perhaps, the lack of interest or accommodation of pupils since the fundamental school. This aspect depends, also, on the demotivation of the teachers (Prediger, Berwanger and Mörs; 2009), because the passivity of some ones encouraging the demotivation of others and vice versa (Alves and Aversi-Ferreira, 2019).

Into of the perspective of the new methodologies, presented problems to students must be challenging, as possible real, generating interest (into an unknown perspective for generate motivation, not be only application of algorithm) and presenting some difficult level (Dante, 1998), for do not generate demotivation (Rodrigues and Magalhaes, 2012)

The enthusiasm of pupils additionally also dependent on the teacher's and of the teacher/student relationship (Lupinacci and Botin, 2004), to obtain a positive feedback, and this is a complex subject that need deep studies by educators.

According, new methodologies for education play a very important role for new approach in the teaching, generating a new perspective of learning, in general and for mathematics (Alves and Aversi-Ferreira, 2019).

In the new mathematical methodology, a very studied purpose is the Solving Problems that indicates to students a new routine and stimulate of thinking, with emphasis on the process, generating situations that requires reasoning to solve problems themselves (Lupinacci and Botin, 2004; Caon and Cardona, 2015). Increasing an elaborate process of thinking (Ferreira, Silva, Nunes, 2015) applying deductive and inductive reasoning, for improve notions of graphic proportions, improving the capabilities for build conjectures and mathematical arguments, following logical arguments and to validate their own construction (Mendes, 2009).

Differently of conservatism teaching, only the formulas are not a true way to be solve problems (Carraher, 1986, Caon and Cardona, 2015); it is important to stimulate students to use procedures and previous knowledge to analyzes formulas and real situations using critical thinking (Lupinacci and Botin, 2004), generating, self-confidence, that is a heuristic not only mechanical process (Caon and Cardona, 2015).

Into those contexts, is of the education interest to verify whether students leave your courses, as well as university in adequate conditions and efficiently prepared to face the market and graduation and whether they attend to continuous formation (Oliveira et al., 2001, Cintra & Oliveira, 2001). Indeed, some professions need of specific disciplines for improve them competences, both in labor and academic work.

As cited above, academic works have indicated which didactic methods to teaching mathematical disciplines fail in the education purpose (Telles *apud* Cintra & Oliveira, 2001).

Studies about as to teach those disciplines are scarce, or is in the incipient period for graduation level, at least in relation and compared to the material dedicated to the same subject for basic and high schools.

Nevertheless, it would be difficult to implement new methodologies for teaching in universities but attempts to use real problems associated studies of scientific papers as example would keep the student's attention by more time (Ferreira, Silva, Nunes, 2015).

All those runs through by a serious teachers' training, but, in general teachers imitate their ancient teachers (Lima and Alves Neto, 2015), mainly the new ones, maybe because the insecurity (Smaniotto and Gentil, 2014). Many teachers in the universities, in the under and graduation, do not present previous didactic preparation for teaching, and it seems a very important problems, specifically, for teaching mathematics and correlated disciplines (Alves and Aversi-Ferreira, 2019).

In this perspective, this kind of teacher could keep the continuation of the ancient conservatism and, by deduction, the non-integration of the students' behavior in a very mutant world (Lester and Koehler, 2003; Lesh and Zawojewski, 2007).

It is reasonable to think that those problems it is a heritage from fundamental for under and graduation education because the demotivation of both, students and professors (Massa, 2015).

On the other hand, there are many possibilities to teaching differently from the conservatism that is suggested, today, by the new methodologies, as methods of the Mathematical Modelling, in specific, for non-exacts courses. If a deep care is necessary to teaching math for pupils that have an attraction for exact sciences, teaching for disciplines linked to mathematics for students of non-exact courses must be done seriously into a very good preparation for do not worst the disappointment of the students with math.

For teaching adequately, is necessary a good class preparation, discipline, organization (Ferreira, Silva, Nunes, 2015). For more pedagogic details about that subject, see Onuchi (2009) and Felder and Silverman (1988) for techniques to reach all types of students.

The teaching practices are not easy, require knowledge, abilities to keep good relationship to students and to wait for the unknown reactions (Lima and Alves Neto, 2015), and avoid being just a communicator (Godoy, 1983) according the new purposes to teaching.

In general, the higher education in Brazil shows a technical and mechanical approach in teaching, that is inconsistent with modern society (Alves and Aversi-Ferreira, 2019, Moraes and Torres, 2004) and the necessity of multiple abilities for individuals, teamwork, adaptation to changes (Belloni, 2008).

Frequently, for the higher education teaching are required master and doctorate degrees, however, a didactic formation could be also required (Fernandes, 1998) because, not necessarily, the graduations prepared teachers (Garcia, 2013), in the bachelors' courses, or the preparation is insufficient (Onuchic, 2012) in pedagogic courses.

Indeed, many papers versa about mathematical teaching for elementary and secondary education, for Solving Problems, for instance, (Lupinacci and Botin, 2004; Chiréia, 2010; Clement and Terrazan, 2011; Silva, 2012; Caon and Cardona, 2015; Freitas, Goi and Giuliani, 2015; Frizzarini and Cargnin, 2016). However, for higher education, papers about math teaching are scarce, and for graduation much scarcer, as well.

Teachers of math in under and graduation schools could start using modern education methodologies to prepare students to learning to explore better the papers, for example. On the other hand, teachers without educational formation or with ancient formation in pedagogical course, could attend specific courses for teaching for, at least, know the new methodologies.

The use of new educational technologies in the mathematical teaching could indicates a way based on abstract, auditory, verbal, deductive, passive and sequential analysis (Felder and Silverman, 1988) and that could diminish the student's evasion in the exacts courses (Ferreira, Silva, Nunes, 2015) and to evoke them for looking for stimulants' disciplines.

3 | MATHEMATICAL MODELING

The purpose of the use of the Mathematical Modeling in Education is more recent in history, according some authors, it was initiate in 1970's decade in Brazil. However, in other conceptions, it is linked to Mathematica History because the use of modeling is intrinsically associated to diary routine of the ancient people (Biembengut and Hein, 2003; Silveira et al., 2013).

In specific, the Mathematical Modelling methodology begins from the applied mathematics (Frizzarini; Cargnin, 2016) and, posteriorly, different approaches were purposed by Mathematical Education epistemology (Almeida; Silva; Vertuan, 2013).

Some arguments justify the use of the Mathematical Modellings' courses in Superior Education and other teaching levels (Almeida e Silva, 2014), as: 1) to include extracurricular disciplines/knowledge in the course, i.e., multidisciplinary approach; 2) math application and development of mathematical concepts; 3) curricular integration of different disciplines (Frizzarini and Cargnin, 2016), at least.

The Mathematical Modelling method is located between an initial problem situation and the final situation (in the resolution of the problem), i.e., the way is to create proceedings and to obtain information added to search for mathematical knowledge target for a goal (Frizzarini and Cargnin, 2016). In this way, the use of mathematical modelling in the education is inserted in the active methodology if the student searches a solution by own reasoning.

The application of Mathematical Modelling in the education begin in 1960's decade into a utilitarian movement (Biembengut, 2009), in it is begin in the 1970's decade in Brazil

(Silveira et al., 2013). A landmark in Brazil about the teaching of Mathematical Modelling was the creation of the graduation course about the Mathematical Modelling and in 2001 the Brazilian Society of Mathematical Education creates the Work Group of the Mathematical Modelling (GT10) (Frizzarini and Cargnin, 2016).

A book intitle “Mathematical Modeling in the Brazilian Mathematics Education: Researches and Educational Practices” [Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais] was published indicating the follows items of concentration field of Mathematic Modelling Education: 1) Theoretical aspects of Mathematical Modelling; 2) Modeling and practice in the class to test the strategies; 3) Mathematical Modeling and the tendencies of the information and of the communication; 4) Mathematical Modeling and teachers formation (Barbosa; Caldeira; Araújo, 2007).

In 2015, a second book was published about the Mathematical Modeling by the GT10 intitle: “Practices of the Mathematical Modeling: Relates of Experiences and Pedagogical Purposes” [Práticas de Modelagem Matemática: Relatos de Experiencias e Propostas Pedagógicas] (Almeida; Araújo; Bisognin, 2015) including interdisciplinary purpose for biological phenomenon.

The initiation of the use of the Mathematica Modeling in the classroom exist for more than two decades, however, as happens with other Mathematical Education field, it is scarcely explored in teaching, mainly in under and graduation.

Indeed, the studies of new methodologies in higher education is new (D’Ávila, 2008; Pimenta e Anastasiou, 2010; Garcia, 2013) presenting few papers indicating as to use the new technologies in mathematics and correlated disciplines (Barros and Sousa, 2015), as well, for graduation.

4 | METHODOLOGIES

The students answered a structured questionnaire and added spontaneous information about the discipline conducted using an active and traditional teaching, from March to July of 2020.

The questions were:

1. What were the reasons that led you to look for the Mathematical Models course at PPGCA?

2. Has the change of the teaching system from the classroom to the Special System of Remote Studies changed your enthusiasm to follow the discipline? If possible, explain the reasons.

3. Do you have pedagogical training, at undergraduate or postgraduate level?

4. Do you know the teaching method called Active Methodologies? If so, write down the concept you have about him.

5. Do you believe that finding solutions to problems on your own can improve your learning? Please, if possible, justify.

6. Do you prefer traditional classes [teacher explaining with you studying for tests, activities] or looking for information on your own? Justify, please.

7. Do you believe that distance learning has affected your learning in the discipline of mathematical models?

8. Have you improved your knowledge of mathematical models and will you be able to prepare one for your dissertation / thesis?

The relate was used to obtain a free expression of the students about the discipline and its methodology.

About the teacher, he has degrees in Biology [bachelor], Civil Engineer and Mathematics [with pedagogical formation] and some papers published about the under-graduation teaching and education in the embryology, physiology, anatomy and Civil Engineer subjects.

About the discipline preparation, the teaching menu of the "Mathematical Models applied to Environmental Sciences" was "Elementary Mathematics Notions, functions, calculus differential and integral, mathematical modeling definition, steps for mathematical modeling construction, examples of application"; separated into three units with the following topics:

Unit 1: Elementary Mathematics Notions – operations, functions, limits, differential and integral calculus.

Unit 2: Mathematical modeling - definitions, mechanical models, empiric models, semi-empiric models, construction of mathematical modeling – steps

Unit 3: Application of the mathematical modeling – in the sciences in general, in the environmental sciences.

The objectives were "to supply the students an integrated view, theory and practical of the mathematical modeling uses in the research in general and, in specific, for environmental sciences.

The teaching methodology was the "expositive classes with group discussions and active purposes".

The methodology must be altered because the necessity of remote teaching after just one presential class. Then, the teacher recorded classes with all purposed subjects in the menu available in the YouTube channel and online classes were performed into 15 and 15 days. The suggestion of the university was avoiding the online classes because the difficulties of some students in to access the internet and possible loss of signal during the classes, because the classes were performed in the cited time.

Most of the classes were the students presenting papers about their master or doctorate subjects. In all classes before the presentation there was a time for solve

doubts about the recorded classes or other. The first class was used for explanation of new methodologies and that active methodology shall be used. A WhatsApp group and e-mail address of the teacher were available for pupils solve doubts. Some classes and explanations about the mathematical modeling were performed by the teacher, mainly for populational models.

The evaluation in the discipline was made via presentation of the seminaries and resolution of an exercise about the populational models of the Malthus and Verhulst and a comparison between both. On the final, in a meet with all students, with one absence, the students suggested your scores according the dedication for the discipline, and an average of the scores generate the final score.

5 I RESULTS

5.1 From students

The discipline had 11 students, but two don't responded the questionnaire and don't write the relate about the discipline, one Environmental Engineer and one mathematic.

In relation to first question [What were the reasons that led you to look for the Mathematical Models course at PPGCA?], 8 different answer were obtained with more than one for students most time. Three answer that the reason was they teacher request; four to obtain more knowledge about the subject; just one with the goal to obtain autonomy in mathematical model; one because have mathematics difficulty; four to write the dissertation/thesis according the purposed project; one because no other discipline in the graduation program have mathematical subject; one for complete credits; and one because the similarity of the purpose with a discipline in under graduation.

The second question [Has the change of the teaching system from the classroom to the Special System of Remote Studies changed your enthusiasm to follow the discipline? If possible, explain the reasons], shows 6 responses linked to diminish of enthusiasm, 3 increase one and one responded as no change. Interesting, two pupils responded that increase for a side and diminish for other. The main reasons for the enthusiasm diminish were difficult for solve doubts, 5 of them; lack of academic environment [3]; problems of connection [2]; absence of human relation [2]; many distractions in home [2]; change of experiences with colleagues [1]; problems in follow the classes chronogram [1], increase of anxiety. The increase of stimulation was the distance between of university and home (around 100km) [1], use of recorded classes for revision [1]. For one student, there was no effect the change of teaching for remote teaching.

Just one student responded to had pedagogic formation according the question [Do you have pedagogical training, at undergraduate or postgraduate level?], one is attending for complementation; 8 responded have not pedagogic formation and one of them is a teacher in a university.

In the question four [Do you know the teaching method called Active Methodologies? If so, write down the concept you have about him], six students responded NO, two responded YES and one said to know barely the Active Methodology. Just the student that attended pedagogical course of Biology and the teacher in a University gave the correct concept about this methodology that was the active action of the student in your learning.

The number five question [Do you believe that finding solutions to problems on your own can improve your learning? Please, if possible, justify], two of them said to have difficult to learning alone, five, said that to learn your selves seems better, and two answered both in accord the circumstances. Those that responded NO indicated lazy, necessity of the teacher, preference for group studies and long time to learning as reasons of their choice; for the answer YES, the better criticism about the subjects and necessity to more study to learn. Those that responded BOTH, the vantage cited were the preparation for the future work, however, one of them cited difficulties to learning counts alone and general difficult to learning alone.

For question six [Do you prefer traditional classes [teacher explaining with you studying for tests, activities] or looking for information on your own? Justify, please], three students prefer traditional classes because the facilities for solve doubts, for better understanding of subjects in participating of the classes; just one choose the active learning considering as a challenge; five of them choose BOTH, traditional and active methodologies to be used together, however, one cited that for math the traditional could better, but for other disciplines the active methodologies is better; other cited that depends of the quality of the didactic of the teacher, for a “good” teacher the preference is by traditional teaching.

Eight students considered negative for their learning in responding the question seven [Do you believe that distance learning has affected your learning in the discipline of mathematical models?] and just one considered positive the distance teaching. The problems cited were fear for contact the teacher, difficulties for solve doubts, other compromises disturbing the studies, procrastination to study the discipline, however, just one said that have problems, but not so much.

The last question, number 8 [Have you improved your knowledge of mathematical models and will you be able to prepare one for your dissertation / thesis?], shows all responses as YES for improve the knowledge, but four of the students said be uncapable to generate a mathematical model for your scientific work, three said that they are capable, and one does not response about that capability.

Form the free texts the main complaint was about the pandemic that generates the remote teaching into five citations, suggestion for list of exercises and weekly tasks were five citations also, one ask for more online meetings. They cited good actions as the teaching of the logic of the calculus not only counts [2], importance of the basic classes of mathematics as review [2], the opportunity of reflection of the subjects in the active methodology [2], discussion of the articles about the each field of the students [3], study of a case for

mathematics modeling [2]; just one citations as good actions versa about a WhatsApp group for discussion, system of self-evaluation, the understanding of the populational models, the understanding of the types of models, the understanding about the growth of the pandemic via populational models and the recorded classes.

5.2 From teacher

The purposed subjects of the discipline were performed in the recorded classes and the presentation of seminaries were made in the online classes with most of students present. Some lost of signal indeed occurred with some students housed far from the urban centers. Spontaneous group of studies were made by the students for study the recorded classes and for resolution of the exercises about the populational exercises.

The menu of disciplines was constructed to generate basis for the understanding of the populational models with exercises of preparation in the classes, however, many problems for understanding the way for resolution. For resolution of exercises was necessary looking for data from a real population and to organize to use a formula, and this was the main difficulty. Most students show a good attention with the mathematical explanation of the exponential and logarithmic functions linked to real examples.

One of the objectives was to demonstrate in detail the origin of the equations for the Malthus and Verhulst models, however, the difficulties showed for students generate a partial demonstration. Indeed, most of students were biologists, three were environmental engineer, one economist, one mathematician, one biotechnologist. All of them show some difficulties in mathematical thinking, indeed, non-one obtained a correct resolution of the purposed exercise, that was a trivial one.

The seminaries were well presented by the students with some difficulties about the mathematics subjects. In the self-evaluation, with just one absence, all students cited about the delay in following the classes and difficulties in understanding the resolution of the exercise purposed.

6 I DISCUSSION

According the results data, the most of students shown unsatisfaction with the change from the presential for remote classes. In general, they prefer the presence of the teacher in the normal classes and, interestingly they wrote that felt shame to call the teacher in the social medias, WhatsApp and e-mail.

According the responses, three students attended to discipline because the request of the advisor and/or to complete credits, that is not a good reason to attend a discipline and could be difficult to implant new methodologies. Other cited as reason to learn about the Mathematical Model and mathematics most for use in the papers and dissertations/thesis, in general, and it is an interesting situation in the search for Mathematical models, indicating the importance this a subject for modern science, however, the teacher observed that most of them had no complete idea about this discipline.

Most of students cited demotivation in change from the normal to virtual classes because many reasons, but it is a strong indication that the new methodologies present some difficulties to be developed (Onuchi et al., 2014), at least for this class.

Just one student had educational formation and less than half of them known about the active methodologies and could been a motive of the cited difficult in to implant Mathematical Modeling in this class.

Indeed, all students shown unsatisfaction with active methodologies and anxiety to solve problems derivate from the theory, probably because the behavior learning in the long time under usual and traditional teaching (Alves and Ferreira, 2019). Problems were shown in the recorded classes and solved by the teacher, but list of exercises was not presented, just the indications for studies in books, because have not enough time to teach complete disciplines from the menu. According the teacher thinking, master and doctorate students must be showing some facility to obtain knowledge form the texts, since that the previous studies about those disciplines were studied before in the under graduation. Indeed, in general, biological courses present mathematics in their menu. However, it was not observed for most of students, including some environment engineer.

All of them understood about the need to study and to solve problems by own effort, but the teacher felt that the absence of a structured algorithm and model that indicate a similar response was the main cause of difficult, i.e., solved examples to direct the solutions for other problems, in that case, the teacher solving problems, providing an exercises list with problems similar to solved exercises. This case there is an incoherence between the necessity and behavior, the thinking indicates the best way to learning, however, the longtime of traditional practices seems overcome the reason.

In general terms, this kind of situation comes from the mistaken interpretation of the teaching methods and philosophy from the philosophers and heritage from the Germany method (Theory of Mental Discipline) based on the long list of problems as training to solve problems emphasizing the final results and not the process (Onuchi et al., 2014), until now used in Brazil (Belhot and Oliveira Neto, 2006).

On the other hand, some students cited the difficulty to learn alone, i.e., in the absence or far from the teacher. That could be explained by the theory of the social-historical-cultural psychology that preconizes the environmental influence on the mind formation and cognitive process (Vygotsky, 1991; Luria, 1937).

An unexpected situation was that all students complain verbally about the time to dedicate to disciplines because the excess of tasks, probably because the implantation of remote studies and the teachers sent so many tasks, and interesting, they do not complain about that in the free text. That is cited problem to implant the Mathematical Modeling and Problems Solving in the teaching, according Ferreira, Silva and Nunes (2005).

According the perception of students and teacher about the discipline of Mathematical Modelling, there were problems for students to accept the remote studies and to absorb the active teaching methodologies, case cited by Beholt and Oliveira Neto (2006).

The teacher observed the difficulties in mathematical bases, a common problem in Brazil (Alves and Aversi-Ferreira, 2019) that could have generated the unsatisfaction with the resolution of problems because of the comfort with the traditional teaching and the very strong necessity of the use the identical model of problems for application of algorithms, then decreasing the effort to solve other problems.

7 | CONCLUSIONS

Teacher and students believe that there is a need of detailed explanation about the new methodologies for students in the first class to try obtaining the adherence for an active methodology of teaching. The implantation of the Mathematical Modeling occurred but not totally so succeed because, manly:

1. The drastic change from the normal to virtual classes.
2. No experience from the students with Mathematical Modeling and Solving Problems.
3. Preference of students of the presence of the teacher in the normal classes.
4. Necessity of the students in training on the solved exercises and a similar list of the exercises to solve problems.
5. Difficult of the students in being auto taught.
6. Difficult of the teacher in the perception of the student's difficulties because of the virtual classes.

The problems cited by other authors as few time and engrained culture in traditional teaching were observed in this work, indicating the need in to introduce the Mathematical modeling and Solving problems in the initial phases of the mathematics teaching.

REFERENCES

BARROS, R. M. A.; SOUSA, C. N. S. Estratégias de resolução de problemas de matemática em estudantes do ensino superior. Ciências & Cognição, 20(1): 123-132, 2015.

BAZZO, W. A. Qualidade de ensino e sistemas de avaliação. Texto básico da teleconferência: Engenheiro 2001, 1996.

BELHOT, R. V.; OLIVEIRA NETO, J. D. A soluçao de problemas no ensino de engenharia. In: XIII SIMPEP, Bauru, 2006.

BELLONI, M. L. Educação à Distância. 5 ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

BERNARDINIS, M. A. P.; FREITAS, M. S.; COSTA, R. A.; ARAUJO, W. B. L. Construção de baralho interativo como ferramenta para aprendizado na disciplina Sistemas de Transportes do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná. In: Congresso Nacional de Ambientes Hipermídia para Aprendizagem, 2015, São Luiz. 7º CONAHPA, 2015a.

BERNARDINIS, M. A. P.; FREITAS, M. S.; COSTA, R. A.; ARAUJO, W. B. L. Construction of Interactive Card Games as Appliance for the learning in discipline Transport´s Systems in Civil Engineering Course of Universidade Federal do Parana. International Journal for Innovation Education and Research , v. 3, p. 01-09, 2015b.

BERNARDINIS, M. A. P.; FERREIRA, K. S. M.; WIN, G. Grupo de estudos como alternativa inovadora para o aprimoramento no processo de ensino no curso de Engenharia Civil da UFPR. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2016, Natal. COBENGE, 2016.

BIEMBENGUT, M. S. Mathematics Modeling & Problem Solving, Projects, and EthnoMathematics: merging points. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.2, p.197-219, 2014.

BORREGO, M.; BERNHARD, J. The emergence of engineering education research as an internationally connected field of inquiry. Journal of Engineering Education. 100 (1): 14–47, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educacao Fundamental. Parametros Curriculares Nacionais: Matematica. 3º e 4º ciclos. Brasilia: MEC/SEF, 1998.

CAON, A. P.; CARDONA, T. S. A resoluçao de problemas no ensino da matemática: analise da compreensão do conceito de MDC (Máximo Divisor Comum). In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015.

CARAÇA, B. J. Conceitos fundamentais da matemática. 9ª ed. Lisboa: Sá de Costa Editores, 1989.

CARRAHER, T. N. Aprender Pensando. Petrópolis: Vozes, 1986.

CATTANI, A. Recursos informáticos e telemáticos como suporte para formação e quali cação de trabalhadores da construção civil. Porto Alegre, 249 p., 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CHIRÉIA, J. V. Trabalhando com a Resolução de Problemas na Educação Básica. 2010. Disponível em: **<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/74-4.pdf>,** Acesso em: 08/02/2018.

CLEMENT, Luiz; TERRAZZAN, Eduardo Adolfo. Atividades Didáticas de Resolução de Problemas e o Ensino de Conteúdos Procedimentais. **Rev. electrón. investig. educ. cienc.**, Tandil, v. 6, n. 1, p. 87-101, jul. 2011. Disponível em <http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662011000100008&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 08 feb. 2018.

CORDEIRO, J. S.; ALMEIDA, N. N.; BORGES, M. N.; DUTRA, S. C.; VALINOTE, O. L.; D'AMBROSIO, B. A. The Modern Mathematics Reform Movement in Brazil and Its Consequences for Brazilian Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics 22: 69-85, 1991.

CORDEIRO, J. S.; ALMEIDA, N. N.; BORGES, M. N.; DUTRA, S. C.; VALINOTE, O. L.; PRAVIA, Z. M. C. Um futuro para a educação em engenharia no Brasil: Desafios e oportunidades. Revista de Ensino de Engenharia, 27(3): 69-82, 2008.

CORDEIRO, D. S. B.; BONATTO, I.; ZORZAN, L. G.; PINTO, M. S. N.; SONEGO, M. F.; NETO, E. G.; DE MEDEIROS, M. H. F.; BERNARDINIS,M. A. P. Aplicação de Problem Based Learning na disciplina de Sistemas de Transportes do curso de Engenharia Civil da UFPR. In: IV Congresso Nacional dos Grupos PET de Engenharia Civil, 2017, Fortaleza, 2017.

D’AMBROSIO, U. Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer. 3a ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.

D´AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática: da Teoria à Prática. 16ª ed. Campinas, Papirus. 2008. 121p.

DANTAS, S. H. G. Ensino ou educação em Engenharia? A formação didático-pedagógica dos engenheiros professores. Revista Tecnologia, xx(xx): 63-69, 1992.

DANTE, L. R. Didática da Resoluçao de Problemas de Matemática. 2ª ed. São Paulo: Ática, 1998.

D’ÁVILA, C. M. (2008) Formação Docente na Contemporaneidade: Limite e Desafios. Revista da FAEEBA: Educação e Contemporaneidade, Salvador, v 17, n.30, jul/dez 2008.

ENGLISH, L.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In: Conferência apresentada no 11o Congresso Internacional de Educação Matemática - ICME 11. Monterrey, México, 2008.

FERNANDES, C. M. B. (1998) Formação do Professor Universitário: tarefa de quem? In: MASETTO, M. (Org.) Docência Universitária. Campinas: Papirus. p.95-112.

FERREIRA, L. L.; SILVA, L. B.; NUNES, C. B. O ensino da matemática através da resolução de problemas no curso de engenharia civil. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015.

FREITAS, J. Q. P.; M. E. J.; O. F. Resolução de problemas no ensino da matemática: Uma Introdução à Geometria Fractal no Ensino Fundamental. Trabalho de Conclusao de Curso – Universidade Federal do Pampa, 2015.

GARCIA, C. M. (2013) Formação de professores: para uma mudança educativa. Porto: Porto Editora, 2013.

GODOY, A. S. Professor universitário da área de agronomia: o problema na formação pedagógica. Dissertaçao (mestrado em educação) – Faculdade de Educaçao, Universidade de São Paulo, 1983.

GROENWALD, C. L.; SILVA, C. K.; MORA, C. D. Perspectivas em educacao matematica. Acta Scientiae. 6(1): 37-55. 2004.

JESIEK, B.K., L.K. NEWSWANDER, AND M. BORREGO. Engineering education research: Field, community, or discipline? Journal of Engineering Education98 (1): 39–52, 2009.

JESIEK, B. K., BORREGO, M., & BEDDOES, K. Advancing global capacity for engineering education research (AGCEER): relating research to practice, policy, and industry. Journal of Engineering Education. 99 (2): 107-119, 2010.

JONCICH, G. M. The sane positivist: a biography of Edward L. Thorndike. Middletown: Connecticut: Wesleyan University Press,1968.

FERRAZ, H. A formaçao do engenheiro: um questionamento humanístico. São Paulo: Ática, 1983.

Frizzarini, S. T.; Cargnin, C. Prática de Ensino – Modelagem Matemática e Resolução de Problemas. Maringá: UniCEsumar, 2016.

LARIOS, M. R. B.; PASETO, R. C. Ensino por projetos: A engenharia civil empregando as metodologias ativas de ensino-aprendizagem. Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia. Foz do Iguaçu, 2016.

LAUDARES, J. B.; PAIXAO, E. L.; VIGGIANO, A. R. O ensino de engenharia e a formação do engenheiro: contribuição do programa de mestrado em tecnologia do CEFET-MG - Educação Tecnológica. Educ. Tecnol., 14(1): 60-67, 2009)

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J.S. (2007) Problem Solving and Modeling. In: Lester, F., Ed., Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Information Age Publishing, Greenwich, CT, 763-802.

LESTER, J.; KOEHLER JR, W. C. Fundamentals of Information Studies: Understanding Information and Its Environment. New York: Neal-Schuman, 2003. Pp. xvii+306

LIMA, S. S.; ALVES NETO, F. R. Desafios na prática pedagógica do docente iniciante em instituições de ensino superior. Revista Saberes da FAMETA. 2: xx-xx, 2015.

LOPES, A. P.; MARTINS, D. B. PBL como estratégia de ensino-aprendizagem em uma disciplina de inte- gração e gerenciamento de projetos multidisciplinares de edificações na engenharia civil. **Gestão & Tecnologia de Projetos**, São Carlos. v.12 n.1 p53-67 Jan/Abr 2017. http://dx.doi.org/10.11606/gtp.v12i1.98255.

LOPES, L. F., FARIA, A. A. O que e o Quem da EAD: historia e fundamentos. Curitiba: Intersaberes, 2013.

LURIA, A. R. (1937). *The working brain: Na introduction to neuropsychology*. New York: Basic Books.

MACEDO, G. M.; SAPUNARU, R. A. Uma breve história da engenharia no Brasil e no mundo: foco Minas Gerais. REUCP, 10(1):39-52, 2016.

MACHADO, L. J. Matemática e realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática. São Paulo: Cortez, 1987

MANN, C. R. A Study of Engineering Education. The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. New York. 1918.

MANSFIELD, D.F.; WILDBERGER, N. J. Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. Historia Mathematica. 44: 395–419, 2017.

MASSA, M. S. A formação didático-pedagógica do docente da área de computação: um estudo de caso em uma Universidade Brasileira. In: Anais do 35º Congresso Brasileiro de Computação, Porto Alegre, 2015.

MENDES, I. A. Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MORAES, M. C; TORRE, S. (2004) Sentirpensar: fundamentos e estratégias para reencantar a educação. Petrópolis: Vozes.

NOSELLA P. Trabalho e educação. Do *tripalium* da escravatura ao labor da burguesia à *poiésis* socilista. In: GOMEZ, C. M. Trabalho e conhecimento: dilemas na educação do trabalhador. São Paulo: Cortez, 2004.

OLIVEIRA, V. F. Teoria, Prática e Contexto. Índices de Resumos Apresentados Ao VI Encontro De Educação Em Engenharia. 2000.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN. A. M. (Orgs.). Resolucao de Problemas: Teoria e Prática. São Paulo: Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? In: IV Jornada Nacional de Educacao Matemática, 2012.

ONUCHIC, L. R. e ALLEVATO, N.S. G. Formação de professores- Mudanças urgentes na licenciatura em Matemática. In: FROTA, Maria Clara Rezende e NASSER, Lilian. Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisa e Debates. Recife: SBEM, 2009, pg. 169-187.

PARCHEN, M. F. R.; SCHEER, S.; PARCHEN, C. F. A. Contextualização do ensino-aprendizagem na disciplina de construção civil articulada em ambiente virtual de aprendizagem colaborativo. da Vinci, v. 4 , n. 1, p. 169-190, 2007.

PIAGET, J.; BETH, E.W. Epistemologia Matemática e psicologia. Barcelona, Espanha: Crítica S.A., 1980.

PIMENTA, S., ANASTASIOU, L. (2010) Docência no ensino superior. 3. ed. São Paulo: Cortez.
PREDIGER, J.; BERWANGER, L.; MÖRS, M. F. Relaçao entre alunos e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. Revista Destaque Acedemicos, 1(4): 23-32, 2009.

PONTE, J. P. (2005). Gestao curricular em matemática. In: GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp.11-34). Lisboa: APM. Disponível em http://hdl.handle.net/10451/3008. Acesso em: 09 fev. 2018.

RESNICK, L.; FORD, W. W. The Psychology of Mathematics for Instruction, Lawrence Erlbaum Associates Publ., New Jersey. 1981.

RODRIGUES, A.; MAGALHAES, S. C. A resolução de problemas nas aulas de matemática: diagnosticando a prática pedagógica. Secretaria da Educaçao do Estado do Paraná, 2012. Acessed in: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf

SANTOS, I. B. O ensino de matemática nos Estados Unidos nas primeiras décadas do século XX: investigacao sobre uma alteracao do padrao disciplinar. Cadernos de História da Educação, v.15, n.1, p. 141-165, jan.-abr. 2016

SESOKO, V. M.; MATTASOGLIO NETO, O. O uso de estratégias ativas no curso de graduação de engenharia civil da escola de engenharia de Mauá. In: Anais do VII Seminário Mauá de Iniciaçao Científica. 2015.

SILVA, L. A. Ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas no ensino fundamental II. Rios Eletrônica- Revista Científica da FASETE, 6(6): 49-55, 2012.

SMANIOTTO, C. L. D.; GENTIL, V. K. O campo complex da iniciaçao na docencia. In: Anais do IV Congresso Internacional sobre Professorado Principiante e Inserçao Profissional a Docencia, 2014.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Reston: NCTM, p. 1-22, 1989.

THORNDIKE, E. L. The Thorndike Arithmetics. Book one. Chicago: Rand McNally & Company. New York: Teachers College, Columbia University,1917

VYGOSTSK L. S. (1991). *A Formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes.

CAPÍTULO 14

A MATEMÁTICA FINANCEIRA COMO FERRAMENTA PARA O CONSUMO CONSCIENTE

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Aleff Hermínio da Silva
Universidade Federal da Paraíba
Rio Tinto – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/9143455483303761

Claudilene Gomes da Costa
Universidade Federal da Paraíba
Rio Tinto – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/9041959943665343

Agnes Liliane Lima Soares de Santana
Universidade Federal da Paraíba
Rio Tinto – Paraíba
http://lattes.cnpq.br/4275890238659541

RESUMO: O presente trabalho teve como principal objetivo apresentar os resultados de uma investigação realizada numa turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Mamanguape-PB. A investigação foi baseada numa oficina pedagógica intitulada: A Matemática Financeira como ferramenta para o consumo consciente. Tal oficina, que ocorreu em quatro momentos distintos relatados nesse trabalho, teve como objetivos específicos: aprimorar os conhecimentos dos alunos acerca de taxas de juros, descontos, acréscimos e porcentagem, bem como instigar a leitura e a interpretação de encartes de lojas a partir dos conteúdos da Matemática Financeira. Quanto a metodologia empregada, a pesquisa caracteriza-se, em relação aos seus objetivos, como descritiva e exploratória. Já o tamanho da amostra foi de 30 estudantes da turma mencionada. A análise dos resultado obtidos demonstraram um entusiasmado engajamento dos alunos ao longo da oficina, a qual envolveu além de atividades práticas, a apresentação de um vídeo motivacional e discussões em grupo. Percebeu-se que os objetivos traçados foram alcançados. O desenvolvimento da oficina reafirmou a importância de não separar o que se ensina na escola daquilo que os alunos vivenciam. Ficou claro, ainda, que promover uma educação financeira é fundamental para auxiliar os alunos a tornarem-se consumidores conscientes.
PALAVRAS-CHAVE: Matemática Financeira, Consumo, Ensino de Matemática.

FINANCIAL MATHEMATICS AS A TOOL FOR CONSCIENT CONSUMPTION

ABSTRACT: The present work had as main objective to present the results of an investigation carried out in a High School 3rd grade class of a state school in the city of Mamanguape-PB. The investigation was based on a pedagogical workshop entitled: Financial Mathematics as a tool for conscious consumption. This workshop, which took place in four different moments reported in this work, had the following specific objectives: to improve students' knowledge of interest rates, discounts, additions and percentages, as well as to instigate reading and interpretation of stores inserts based on the contents of Financial Math. Regarding the methodology used, the research is

characterized, in relation to its objectives, as descriptive and exploratory. The sample size was 30 students from the mentioned class. The analysis of the obtained results demonstrated an enthusiastic engagement of the students throughout the workshop, which involved, in addition to practical activities, the presentation of a motivational video and group discussions. It was noticed that the objectives set were achieved. The development of the workshop reaffirmed the importance of not separating what is taught in the school from what the students experience. It was also clear that promoting financial education is essential to help students become conscious consumers.
KEYWORDS: Financial math, Consumption, Mathematics Teaching.

1 I INTRODUÇÃO

O Consumo, na sociedade atual, é uma atividade indissociável da vida humana. Ao longo dos anos, com a evolução e estabelecimento da economia capitalista, essa atividade tem sido amplamente facilitada por uma variedade de fatores como: a ampliação da produção de bens por meio dos avanços tecnológicos; a ascensão do poder aquisitivo do cidadão, além dos bem-sucedidos avanços na área da publicidade. Atrelado a essa grande ampliação do consumo, o qual é, antes de tudo, aplicar parcela econômica de capital para obter uma coisa, está o estabelecimento de hábitos desenfreados de compras. Essa problemática já se faz tão presente na sociedade que muitos tem dado mais atenção ao que se tem ou ao que se pretende adquirir do que ao que realmente é necessário.

Comprar de maneira impulsiva e exagerada é um perigo para a saúde física e financeira das pessoas. Nesse contexto, suscita-se a importância de estabelecer práticas que estimulem um consumo consciente onde os indivíduos são capazes de fazer distinção entre as suas necessidades e os seus desejos sem colocar em risco a saúde financeira. Mas, em meio a uma sociedade capitalista onde o consumismo influencia fortemente a vida das pessoas, torna-se um verdadeiro desafio adequar o pensamento delas ao consumo consciente.

Para que tal desafio seja vencido e uma sociedade formada por consumidores conscientes seja firmada, é preciso que uma educação voltada à essa temática esteja presente nas salas de aula. Corroboramos com Cardoso e Paulo (2013, p. 241) que ao mencionar os benefícios do consumo consciente, compartilham com esse ponto de vista ao afirmar que "[...] a educação para o consumo torna-se um tema fundamental na organização curricular escolar." As autoras ainda salientam que apesar dessa temática ser reconhecida nas escolas, muitas ainda não propõem práticas que visem o fortalecimento dessa discussão. Para elas "a Matemática é uma disciplina escolar que pode trazer muitas contribuições para esta formação [...]" (CARDOSO; PAULO, 2013, p. 241).

Nessa esteira, a Matemática Financeira surge como uma ferramenta fundamental para a formação de cidadãos críticos e ágeis que prezam por uma vida financeira equilibrada. Segundo Souza (2010), quando realizamos operações como compra e venda

de produtos e serviços, aplicações e empréstimos em bancos, pagamentos de impostos, cálculo de prestações, por exemplo, estamos manipulando elementos da Matemática Financeira. Diante disso notamos a importância de se trabalhar os conceitos desse ramo da matemática durante toda educação básica.

Entretanto, é no Ensino Médio que esse estudo deve ser aprofundando tendo em vista características como a faixa etária dos alunos e o fato de estarem sendo preparados para o mercado de trabalho o que pode acontecer durante a fase de estudos ou depois. No que se refere ao ensino da Matemática Financeira nessa fase, Almeida afirma que:

> [...] a abordagem de conteúdos de Matemática Financeira no Ensino Médio pode contribuir com a formação matemática deste nível de aluno, bem como capacitá-lo para entender o mundo em que vive, tornando-o mais crítico ao assistir a um noticiário, ao ingressar no mundo do trabalho, ao consumir, ao cobrar seus direitos e analisar seus deveres (ALMEIDA, 2004, p. 5).

Ressaltamos que esse pensamento reafirma a importância de apresentar a matemática, nessa fase do ensino básico, não apenas como uma disciplina obrigatória por estar presente no currículo escolar, mas como uma disciplina que possui aplicações na vida dos alunos. Tal fato está em consonância com o que salienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ao afirmar que "[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade [...]" (BRASIL, 2018, p. 518). Assim, aliar os estudos de matemática à realidade dos alunos é uma forma bem-sucedida de fomentar um aprendizado significativo.

Tais fatos provocaram o interesse de verificar por meio de atividades práticas na sala de aula as contribuições que o estudo da Matemática Financeira atrelado à temas presentes no cotidiano como o consumo, pode trazer tanto para aprendizagem matemática quanto para uma educação financeira promovendo, assim, um consumo mais consciente. Dessa maneira, realizamos uma oficina pedagógica intitulada: A Matemática Financeira como ferramenta para o consumo consciente, com o objetivo de: aprimorar os conhecimentos dos alunos acerca de taxas de juros, descontos, acréscimos e porcentagem e instigar a leitura e a interpretação de encartes de lojas a partir dos conteúdos da Matemática Financeira.

2 | METODOLOGIA

Em relação aos objetivos a pesquisa caracteriza-se como exploratória e descritiva. É exploratória por visar uma familiarização com o problema a ser estudado. No caso dessa pesquisa, investigamos como os conceitos da Matemática Financeira podem promover uma aprendizagem significativa a partir de situações vivenciados no cotidiano, contribuindo, assim, para a estruturação do pensamento crítico dos estudantes em tomadas de decisões. É descritiva por pretender descrever se a Matemática Financeira pode auxiliar o desenvolvimento de um consumo consciente, oferecendo ferramentas para que os alunos consigam colocar em prática o que aprenderam.

O desenvolvimento da pesquisa deu-se numa escola pertencente à rede estadual de ensino localizada na cidade de Mamanguape – PB. Ela teve como base uma oficina pedagógica aplicada numa turma com 30 alunos da 3ª série do Ensino Médio. Organizamos a oficina em quatro momentos. Inicialmente, após nos apresentarmos à turma, mostramos um vídeo motivacional a respeito da importância de ter consciência ao consumir. Para tornar a apresentação do vídeo mais proveitosa estimulamos uma discussão a partir de palavras-chave apontadas pelos alunos.

O segundo momento da oficina teve como objetivo revisar os conteúdos que seriam trabalhados. Apresentamos, então, o que vem a ser a Matemática Financeira, qual a sua aplicabilidade e o que ela estuda. A partir disso, relembramos os conceitos de porcentagem, acréscimos, descontos e juros simples. Dando seguimento, passamos para o terceiro momento com as atividades.

Para tanto, solicitamos aos alunos que se organizassem em grupos. Cada grupo recebeu um encarte de uma loja de móveis e eletrodomésticos da cidade, a qual chamamos de loja X. Junto ao encarte cada grupo recebeu um roteiro de atividades. A primeira atividade do roteiro pedia para os alunos simularem uma compra. Para isso eles deveriam escolher cinco produtos do encarte e em seguida calcular quanto pagariam por esses produtos. Os alunos também foram persuadidos à imaginar que a loja daria 10% de desconto nas compras à vista. Assim perguntou-se o valor do desconto na compra que eles haviam realizado bem como o valor final que eles pagariam.

A segunda atividade requisitava aos alunos que encontrassem um produto no encarte, o qual havia sido marcado por nós, antecipadamente. Chamamos este de produto A. Em seguida, deveriam analisar as informações dadas pela loja como o valor do produto à vista e em até quantas vezes no cartão de crédito não seria cobrado juros. Daí foi pedido para os alunos supor que a loja atribuiria uma taxa de juros de 2% ao mês (a.m.) sob o valor do produto caso este fosse comprado em 12 vezes no cartão de crédito. Com isso foi perguntado quanto eles pagariam de juros nessas condições e qual seria o valor final do produto após sofrer o acréscimo dos juros.

Partimos, assim, para a terceira atividade do roteiro. A fim de realizar esta atividade os alunos receberam o encarte de outra loja de móveis e eletrodomésticos da cidade, a qual chamamos de loja Y. Havia um produto em comum nos dois encartes e nós o identificamos, em ambos, como produto B. Assim os alunos procuraram esses produtos nos encartes e observaram as informações que cada loja deu para o mesmo. Após anotarem lado a lado o preço do produto em cada loja, os alunos calcularam, a sua diferença, em reais. Também calcularam essa diferença em porcentagem. A partir dessa constatação foi perguntando onde seria mais vantajosa a compra à vista e onde seria mais vantajosa a compra no cartão de crédito.

Para a quarta atividade os alunos deveriam observar o produto C marcado no encarte da loja X e verificar qual o seu preço à vista assim como o valor final desse produto

caso fosse comprado em 12 vezes no cartão de crédito. A partir dessas duas informações foi pedido que calculassem a taxa de juros utilizada pela loja na venda desse produto no cartão de crédito em 12 parcelas. Após identificar essa taxa, eles deveriam procurar no encarte da loja X alguma informação a respeito da taxa de juros utilizada pela loja para, assim, verificar se esta correspondia a que eles calcularam. Tal informação estava na última página do encarte em letras pequenas.

No momento final da oficina, promovemos uma discussão sobre as respostas dadas pelos alunos às atividades realizadas com o objetivo de observar como os alunos se saíram nas atividades e tirar as dúvidas que poderiam ter tido. Finalizamos a oficina entregando aos alunos uma ficha avaliativa contendo questionamentos acerca de diversos aspectos que envolveram a oficina desde as suas impressões sobre a forma como esta foi conduzida, passando pelas dificuldades sentidas até como a oficina contribuiu para o seu aprendizado.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Optamos por iniciar a oficina com a apresentação de um vídeo (Figura 1), pois acreditamos que este tipo de recurso pode trazer contribuições para a aprendizagem dos alunos quando é usado de forma adequada, ou seja, com discussões e em conexão com o conteúdo trabalhado. Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) os vídeos são importantes, pois chamam a atenção de quem os observa e "[....] além disso, esse tipo de recurso possibilita uma observação mais completa e detalhada na medida em que permite parar a imagem, voltar, antecipar" (BRASIL, 1998, p. 46).

Figura 1 – Alunos assistindo à um vídeo sobre Consumo

Fonte: Arquivo pessoal, 2019.

Conforme mostra a figura 1, os alunos assistiram com atenção ao vídeo apresentado e em seguida parte da turma se voluntariou para uma discussão na qual foram apontadas palavras mencionadas no vídeo que chamaram a atenção deles. Acreditamos que por termos iniciado dessa forma atraímos o engajamento dos alunos para o desenrolar da oficina.

Quando partimos para o segundo momento, onde apresentamos os conteúdos que seriam trabalhados, pudemos sanar algumas dúvidas e observar algumas dificuldades sentidas pelos alunos, como, por exemplo, no cálculo de porcentagens. Em seguida, no desenvolvimento das atividades, essas dificuldades, de fato, foram evidenciadas.

No entanto, acreditamos que termos organizado os alunos em grupos pode ter contribuído para a superação dessas dificuldades, tendo em vista que observamos um auxiliando o outro na resolução das atividades. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+) "Apesar de rejeitado por muitos, sob alegação de que os alunos fazem muito barulho e não sabem trabalhar coletivamente, essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver" (BRASIL, 2002, p. 129).

Além disso, conforme mostra a figura 2, o uso do encarte como um recurso didático conseguiu atrair os alunos, pois os fez ver que a matemática está presente em situações do cotidiano que para muitos não estava. Utilizar recursos como esse contribui para termos um ensino de matemática integrado com a realidade dos alunos, como sugere a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Figura 2 - Alunos realizando atividades com encarte

Fonte: Arquivo pessoal, 2019.

É importante destacar a importância do momento final da oficina. Nessa etapa os alunos puderam compartilhar entre os seus colegas como resolveram as atividades. Dessa forma foi possível estimular a comunicação entre os alunos. Esta é uma das competências defendidas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), sobre a qual salienta que "Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas pelos símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua nativa, realizando apresentações orais dos resultados [...]" (BRASIL, 2018, p. 519).

Partiremos, então, para análise das fichas avaliativas entregues aos alunos no final da oficina. Nesta análise pudemos verificar que 60% dos alunos consideraram ótima a escolha do tema da oficina o que reforça a importância dessa temática na vida deles. Todos os alunos concordaram que é importante estudar Matemática Financeira. Em contrapartida 67% dos alunos alegaram sentir dificuldades ao estudar esses conteúdos. Isso alerta para necessidade de aulas diferenciadas capazes de auxiliar os alunos a superarem essas dificuldades.

Perguntamos, em seguida, se os alunos se consideravam consumidores conscientes e 60% deles responderam que não. Daí questionamos como eles achavam que a Matemática Financeira pode contribuir para que possam ter um consumo mais consciente. Um dos alunos respondeu: "Nos ensina porcentagem e juros que ajuda a ser um consumidor consciente". Já outros mencionaram a contribuição que esse estudo dá para elaboração de um orçamento. Tais respostas refletiram o envolvimento dos alunos ao longo das atividades assim como o aporte que elas deram para o seu conhecimento.

O desenvolvimento da oficina reafirmou a importância de não separar o que se ensina na escola daquilo que os alunos vivenciam. É fundamental aproveitar de forma adequada elementos e recursos oriundos do cotidiano nas aulas de matemática. As vezes coisas simples e comuns como um encarte de loja pode contribuir para que a aprendizagem dos alunos tenha mais sentido e dessa forma "[...] proporcionar aos estudantes a visão de que ela [a Matemática] não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história" (BRASIL, 2018, p. 522).

4 | CONCLUSÕES

A realização da oficina aqui relatada nos proporcionou importantes reflexões no que se refere ao ensino de matemática. Sabemos que, infelizmente, a matemática ainda é vista como uma disciplina difícil de se compreender e, portanto, é comum notarmos alunos desinteressados por ela. No entanto, é preciso que práticas educacionais diferenciadas ou mesmo que sigam as orientações apontadas pelos documentos que regem a educação no nosso país, sejam aplicadas.

As observações realizadas durante a oficina e a análise das fichas avaliativas nos fizeram perceber que as atividades desenvolvidas surtiram o efeito esperado, pois deram

a oportunidade de promover um estudo de matemática baseado em um tema fundamental para os dias atuais – o consumo. Destacamos ainda o interesse dos alunos para com a temática, pelo visto em razão da mesma estar presente no cotidiano deles. Eles se empolgaram ao simular compras e isso deu base para que aprendessem os conteúdos propostos.

A pesquisa baseada na oficina aqui relatada nos reafirmou que é possível, com criatividade e determinação, superar rótulos dados à matemática e, mais importante que isso, contribuir para a aprendizagem dos alunos. Portanto, consideramos que o objetivo da pesquisa foi alcançado, uma vez que, o estudo da Matemática Financeira atrelado à temática do Consumo promoveu uma aprendizagem significativa e, em paralelo, colaborou para o desenvolvimento de indivíduos conscientes no que tange ao consumo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriana Correa. **Trabalhando matemática financeira em uma sala de aula do ensino médio da escola pública.** 2004. 112f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** anos finais do Ensino Fundamental (3° e 4° série Matemática). Brasília: MEC/ SEF,1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Vol. 2. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: ensino médio. Brasília: MEC, 2018.

CARDOSO, Virgínia Cardia; PAULO, Rosa Monteiro. Educação Matemática para um Consumo consciente. In: Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, 7., 2013, Montevideo. **Anais...** Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013, p. 240-249.

SOUZA, Joamir. **Matemática**. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar).

CAPÍTULO 15

UM ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS DO HIPERPLANO E DA (n-1) -ESFERA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 04/01/2021

Joselito de Oliveira
Universidade Federal de Roraima
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Boa Vista-RR
http://lattes.cnpq.br/7059770609022356

Wender Ferreira Lamounier
Universidade Federal de Roraima
Escola de Aplicação
Boa Vista-RR
http://lattes.cnpq.br/5878316434409400

RESUMO: Na Geometria Analítica *são estudados a reta, o círculo e as suas posições relativas.* Neste artigo, de forma semelhante é apresentado um estudo das posições relativas do hiperplano e da (n-1)(n-1)-esfera, no espaço euclidiano n-dimensional. Inicialmente, apresenta-se um estudo sobre as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)(n-1)-esfera. Depois, as posições relativas entre hiperplanos são apresentadas. E finalmente, estuda-se as posições relativas entre as (n-1)(n-1)-esferas.
PALAVRAS-CHAVE: Hiperesfera, Hiperplano, Espaço Euclidiano.

A STUDY OF THE RELATIVE POSITIONS OF THE HYPERPLANE AND OF THE (n-1) -SPHERE IN EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT: In Analytical Geometry, the line, the circle and their relative positions are studied. In this paper, in a similar way, a study of the relative positions of the hyperplane and the (n-1)-sphere is presented, in the n-dimensional Euclidean space. Initially, a study is presented on the relative positions between the hyperplane and the (n-1)-sphere. Then, the relative positions between hyperplanes are presented. And, finally, we study the relative positions between the (n-1)-spheres.
KEYWORDS: Hypersphere, Hyperplane, Euclidean Space.

1 I INTRODUÇÃO

Nas Geometrias, Analítica Plana e Espacial, estuda-se as posiç*ões* relativas de retas e planos*.* Estuda-se também a posição relativa: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências. Neste artigo estuda-se, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)(n-1)-esfera, entre hiperplanos, e entre (n-1)(n-1)(n-1)-esferas, compilando assim todo o estudo realizado nos artigos (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2015) e (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019). Além das proposições, que caracteriza as posições relativas dos referidos objetos geométricos, apresenta-se o conceito de hipersecante. Em (MILLMAN, 1977), assim como em

(MENDELSON, 1990), a definição de (n-1)--esfera restringe-se ao caso em que o raio vale um) o centro *é* a origem. Aqui, sem perda de generalidades vamos considerar a (n-1)-esfera com raio maior ou igual a um e centro em um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$. O artigo está organizado da seguinte forma: Na seção dois encontra-se a matemática necessária ao entendimento das seções seguintes. Sua leitura poderá ser dispensada. A seção três nos mostra a fórmula para se calcular a distância entre um ponto e um hiperplano. Na seção 4, estuda-se as posições relativas entre o hiperplano e a (n-1)-esfera. Na seção cinco, as posições relativas entre hiperplanos são estudadas. E finalmente, na seção 6, trata das posições relativas entre (n-1)--esferas.

2 | PRELIMINARES

Nessa seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas que servirão de suporte teórico para o desenvolvimento do artigo. Para iniciar esta seção apresenta-se alguns conceitos básicos que podem ser encontrados nas referências (LIMA, 2005) e (SPIVAK, 2003).

Definição 2.1. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, denota-se por $\mathbb{R}^n$ o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

As operações seguintes fazem do $\mathbb{R}^n$ um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Dados $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, vetores do $\mathbb{R}^n$ e um número real λ, as operações de soma $x + y$ e o produto $\lambda \cdot x$ são definidas por:

i. $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$;

ii. $(\lambda \,.\, x_1,\ldots, \lambda \,.\, x_n)$

Observação 2.1. O elemento neutro para a adição é o **0** = (0, ..., 0), enquanto que o simétrico de $x = (x_1,\ldots,x_n)$ é o elemento $-x = (-x_1,\ldots,-x_n)$, uma vez que x + (-x) = **0**.

Dados dois vetores $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$, o produto interno de x e y aqui considerado é dado por $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

É fácil provar que o produto interno usual satisfaz as seguintes propriedades:

1. $< x, x > \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, e $< x, x > = 0$ se, e somente se $x = 0$;
2. $< x, y > = < y, x >$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3. $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
4. $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$, para todo x, y$\in$ x, y $\in \mathbb{R}^n$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1. De acordo com a definição 2.1, temos os seguintes espaços euclidianos: a reta $\mathbb{R}$; o plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, e o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) | x,y,z \in \mathbb{R}\}$.

Lembramos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando { x, y} = 0.

Para o nosso estudo, vamos considerar a norma euclidiana, isto é, o número real

dado por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Do produto interno é provado que a norma satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, *e* $\|x\| > 0$ *se* $x \neq 0$.

2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Com base na norma pode-se definir a distância em $\mathbb{R}^n$, do seguinte modo*:* Dados *x*, *y* $\in \mathbb{R}^n$, a distância de *x a y* é definida por:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dessa forma dados $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, pontos do $\mathbb{R}^n$ então

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}.$$

O conceito de hiperplano pode ser encontrado em (COELHO, 2001) e (LANG, 2003), mas aqui será enunciado considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2*.* Sejam v ≠ 0 um vetor não nulo e P um ponto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\Gamma_v^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid < X - P,, v >= 0\},$$

é denominado **hiperplano**.

Sendo o hiperplano, que passa pelo ponto $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor não nulo $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, dado $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_v^{n-1}$, então $\langle (X - P), v \rangle = 0$. Portanto, $v \perp (X - P)$, onde $X - P = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$. Então

$$\langle (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle = v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n - p_1 v_1 - \cdots - p_n v_n,$$

ou seja*,*

$$v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n + d = 0, \text{ onde } d = -p_1 v_1 - \cdots - p_n v_n.$$

E esta é a equação do hiperplano Γ_v^{n-1},, que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $v = (v_1, \ldots, v_n)$*.*

Exemplo 2.2. No plano, caso em que n = 2, o hiperplano é a conhecida equação da reta $v_1 x_1 + v_2 x_2 + d = 0$, objeto de estudo da geometria analítica plana.

Exemplo *2.3.* No espaço, caso em que n *= 3*, o hiperplano *é* conhecido como equação do plano $v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + d = 0$.

3 I DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM HIPERPLANO

Nós iniciamos a seção com a versão do teorema de Pitágoras para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, presente em (HONIG, 1976) e proposto como um exercício em (SPIVAK, 2003). Então, nós apresentamos a definição de distância de um ponto a um hiperplano no espaço $\mathbb{R}^n$.

***Teorema 3.1** (Teorema de Pitágoras).* Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Então,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

Demonstração. *Sejam A, B e C pontos em* $\mathbb{R}^n$*, então*

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rangle$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle$$
$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle.$$

Portanto, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$. ■

Corolário 3.1. Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$, tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *e* $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$..

Então:

i) $\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$;

ii) $\|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$.

Demonstração. *Se* $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ *então, pelo Teorema 3.1,* $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

Analogamente, se $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ *então, pelo Teorema 3.1 temos que* $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Veremos agora o caso em que os vetores $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{BC}$ *não são nulos.*

Se $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ *pelo Teorema 3.1 temos*

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 > \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| > \|\overrightarrow{AB}\|.$$

A prova de (ii) é análoga. ■

Corolário 3.2. Sejam *A, B e C* pontos em $\mathbb{R}^n$ tal que $C \neq B, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Então $d(A,B) < d(A,C)$.

Demonstração. *Pelo Corolário 3.1(i) e o teorema 3.1 obtemos* $d(A,B) < d(A,C)$.. ■.

Definição 3.1. A distância de um ponto *P* em $\mathbb{R}^n$ a um hiperplano Γ_v^{n-1}, onde $P \notin \Gamma_v^{n-1}$ é dado como a menor das distâncias de *P* aos pontos de Γ_v^{n-1}, ou seja,

$$d(P, \Gamma_v^{n-1}) = min\{d(P,Q) \mid Q \in \Gamma_v^{n-1}\} \cdot$$

A próxima afirmação será considerada aqui como um axioma, contudo, na referência (KREYSZIG, 1978) é um teorema que precisa de técnicas da análise funcional para realizar sua demonstração.

Axioma 3.1. Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano, P_0 um ponto do $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$ e v um vetor normal a Γ_v^{n-1}. Existe um único ponto $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ tal que $\overrightarrow{PQ} // v$ e $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$.

Agora iremos apresentar uma fórmula que permite calcular a distância de um ponto ao hiperplano. Inicialmente, vamos lembrar a fórmula nos seguintes casos*:*

1. Em $\mathbb{R}^2$, considere a reta $\Gamma_v^1 : ax + by = d$ (hiperplano), gerada pelo vetor v=(a,b) e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_v^1$. A distância do ponto ao plano é dada por

$$d(P_0, \Gamma_v^1) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Em $\mathbb{R}^3$, considere o plano $\Gamma_v^2 : ax + by + cz = d$ (hiperplano), gerado pelo vetor *v = (a, b,c)* e o ponto $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_v^2$. A distância do ponto ao plano é dado por

$$d(P_0, \Gamma_v^2) = \frac{|ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

O próximo teorema nos dá a fórmula para calcular a distância de um ponto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ a um hiperplano Γ_v^{n-1}.

Teorema 3.*2.* Sejam $\Gamma_v^{n-1}: a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d$ um hiperplano gerado pelo vetor não nulo $v = (a_1, \dots, a_n)$ e $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ um ponto em $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$. Então, a distância entre o ponto P_0 e o hiperplano Γ_v^{n-1} é dada por:

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1x_1^0 + \cdots + a_nx_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Demonstração. *A demonstração foi adaptada de (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).*

Seja $\Gamma_v^{n-1}: a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + d = 0$ *a equação de um hiperplano com vetor normal não nulo* $v = (a_1, \dots, a_n)$ *através de um ponto* P *e* $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_v^{n-1}$*, então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto* $Q \in \Gamma_v^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{P_0Q} // v$ *e* $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$. *Como* $\overrightarrow{P_0Q} // v$*, então existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $Q - P_0 = \lambda v$ *, isto é,*

$$P_0 = Q - \lambda v \tag{1}$$

Sendo $P_0 = Q - \lambda v$ *então* $P_0 - P = (Q - P) + \lambda v$. *Portanto,*

$$< P_0 - P, v > = < Q - P, v > + \lambda < v, v >.$$

$$= \lambda < v, v > \cdot$$

Sendo v ≠ 0, então

$$\lambda = \frac{<p_0 - p, v>}{\|v\|^2} \cdot \quad (2)$$

De (1) *e* (2) *obtemos*

$$P_0 = Q - \frac{< P_0 - P, v >}{\| v \|^2} v \cdot$$

Então, a distância de P_0 ao ponto mais próximo Q é igual a

$$\begin{aligned} d(P_0, Q) &= \| P_0 - Q \| \\ &= \| -\frac{< P_0 - P, v >}{\| v \|^2} v \| \\ &= \frac{|< P_0 - P, v >|}{\| v \|}. \end{aligned}$$

E como $d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = d(P_0, Q)$, *então*

$$d(P_0, \Gamma_v^{n-1}) = \frac{|a_1 x_1^0 + \cdots + a_n x_n^0 - d|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \cdot \quad \blacksquare$$

Apresentaremos a seguir a definição de (n-1)-esfera e a equação que à representa no $\mathbb{R}^n$. Em (MILLMAN, 1977) e (MENDELSON, 1990) a definição *de* (n-1)-esfera é restrita ao caso em que o raio vale um e o centro é a origem. Sem perda de generalidades iremos considerar a (n-1)-esfera em que o raio é maior ou igual a um e o centro sendo um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2. Uma (n-1)-esfera no $\mathbb{R}^n$ n ≥ *1,* de raio r > *0* e centro c é o conjunto

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(c, x) = r\}, \text{ onde } n \geq 1.$$

Note que, sendo d (c, x), onde *x = (x_1, ..., x_n) e c = (c_1, ..., c_n),* então

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 = r^2,$$

que é a equação da (n-1)-esfera de centro *c* e raio *r.* Portanto, a (**n-1**)-esfera pode ser escrita como sendo o conjunto

$$\mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2\}.$$

Exemplo 3.1. Dados c = (c_1, ..., c_2) ∈ $\mathbb{R}^n$ e r > *0*, então:

1. Para n = *1*, a *0*-esfera $\mathbb{S}_r^0(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-c)^2 = r^2\} = \{c-r, c+r\}$; ;

2. Para n = *2*, a *1*-esfera $\mathbb{S}_r^1(c) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{2}(x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é o círculo de centro c = (c_1,c_2) e raio r > *0*;

3. Para n = *3*, a *2*-esfera $\mathbb{S}_r^2(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3}(x_i - c_i)^2 = r^2\}$ é a esfera de centro *c = (c_1, ..., c_n)* e raio > 0.

4 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE O HIPERPLANO E A (n-1)-ESFERA

Na educação básica estudamos as posições relativas entre a reta e o círculo (1-esfera), no $\mathbb{R}^2$. Nesta seção, nós estudaremos as posições relativas entre o hiperplano e a (*n*-1)-esfera, no $\mathbb{R}^n$.

O próximo teorema caracteriza as posições relativas entre o hiperplano e a (*n* -1)-esfera, que foram estudas em (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019).

Teorema 4.1*.* Sejam Γ_v^{n-1} um hiperplano que passa pelo ponto *p = (p_1, ..., p_n)* do $\mathbb{R}^n$ e *v = (v_1, ..., v_n)* um vetor normal a Γ_v^{n-1}. Seja $\mathbb{S}_r^{n-1}(c)$ uma (n-1)-esfera de centro *c = (c_1, ..., c_n)* e raio r > *0*. Então:

a. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) > r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(c) = \emptyset$;

b. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) = r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$. Neste caso dizemos que o hiperplano é tangente à (n-1)-esfera;

c. $d(c, \Gamma_v^{n-1}) < r$ se, e somente se, $\Gamma_v^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(q)$, onde k = $d(c, \Gamma_v^{n-1})$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}$ é *a* (n-2)-esfera contida no hiperplano Γ_v^{n-1} com raio $\sqrt{r^2-k^2}$ e centro em q, ponto de intersecção do plano Γ_v^{n-1} com a reta l normal a Γ_v^{n-1}, passando por c, com vetor normal v.

Demonstração. *Sem perda de generalidades vamos considerar:*

i. *A (n-1)-esfera* $\mathbb{S}_r^{n-1}(o) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2\}$, *com centro na origem* 0 = (0, ..., 0), *que de modo simplificado é denotada por* $\mathbb{S}_r^{n-1}$*;*

ii. *O hiperplano* $\Gamma_{e_n}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{R}^n \mid k$ *é constante}, onde* e_n = (0, ..., 1) *é o vetor normal ao hiperplano.*

Nesta primeira parte da demonstração provaremos a implicação da esquerda para direita.

a1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *então pelo Axioma 3.1, existe um único* $p' \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{op'} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, p') > r$.

Temos então que $d(o, q) \geq d(o, p') > r$ *para todo* $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$.

Então $q \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$ *para todo* $q \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e portanto* $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \emptyset$.

b1) Suponha que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *nós concluímos então, pelo Axioma 3.1, que existe um único* $q_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $\overrightarrow{oq_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(o, q_0)$ *então* $q_0 \in \mathbb{S}_r^{n-1}$.

Seja $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *então* $d(o, b) \geq d(o, q_0)$. *Portanto, para todo* $b \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \setminus \{q_0\}$, *temos que* $b \notin \mathbb{S}_r^{n-1}$. *Portanto,* $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} = \{q_0\}$.

c1) Se $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, *então pelo Axioma 3.1 existe um único ponto* $p_0 \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *tal que* $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) = d(p_0, o)$, *onde* $\overrightarrow{op_0} \perp \Gamma_{e_n}^{n-1}$, *e l é uma reta gerada por* $e_n = (0,...,0,1)$, *portanto* $p_o = (0,...,0,k)$.

Sendo $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$ *então* $d(o,p_0) = |k| < r$ *e portanto* $r^2 - k^2 > 0$.

Podemos considerar $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0) = \{p \in \Gamma_{e_n}^{n-1} \mid d(p,p_0) = \sqrt{r^2-k^2}\}$.

Seja $p = (x_1, ..., x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_o)$, então

$$d(p,p_0) = \sqrt{r^2-k^2}$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2 \cdot$$

Concluímos então que $(x_1, ..., x_{n-1}, k) \in \mathbb{S}_r^{n-1}$. *Portanto,* $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1}$, *e como* $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0) \subset \Gamma_{e_n}^{n-1}$, *então*

$$\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \subset \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}. \qquad (3)$$

Podemos concluir que $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1} \neq \emptyset$. Agora, seja $p \in \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma_{e_n}^{n-1}$, ou seja, $p \in \Gamma_{e_n}^{n-1}$ *e* $p \in \mathbb{S}_r^{n-1}$, então

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + k^2 = r^2$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = r^2 - k^2.$$

Logo, $p \in \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$ e portanto

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \subset \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0). \qquad (4)$$

De (3) e (4) concluímos que

$$\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2} \cdot$$

Nesta segunda parte da prova, nós provaremos a implicação dá direita para a esquerda.

a*2) Nós provaremos que: Se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$ *então* $d(0,\Gamma^{n-1}) > r$.

Equivalentemente: Se $d(o,\Gamma^{n-1}) \leq r$, *então* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \emptyset$. .

Se $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *de* (b*1) temos* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p\} \neq \emptyset$. *Agora, se* $d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$, *de* (c*1) concluímos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_2) \neq \emptyset$, *onde* $k = d(o,\Gamma_{e_n}^{n-1})$.

b2) *Provaremos que: Se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \{p_0\}$, *então* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$.

Equivalentemente, se $d((o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ então $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_{e_n}^{n-1}$ não é um único ponto.

Para $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \neq r$ *temos dois casos:* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$ *ou* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$..

No caso em que $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*a1*) temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_{e_n}^{n-1} = \emptyset$.

Agora, se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*c1*) temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$.

c2) *Provaremos que: se* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$ *então* $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) < r$.

Equivalentemente: Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) \geq r$, *então* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} \neq \mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(p_0)$.

Se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) = r$, *pelo item (*b1*), temos que* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = r$..

E se $d(o, \Gamma_{e_n}^{n-1}) > r$, *de (*a1*) temos* $\Gamma_{e_n}^{n-1} \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \emptyset$.■

Agora, vamos ver exemplos de posições relativas entre o plano Γ_v^2 *e a 2*-esfera unitária com centro na origem $\mathbb{S}_1^2$.

Exemplo 4.1. Se $d(o, \Gamma_v^2) > 1$ então o plano Γ_v^2 *não intercepta a 2*-esfera unitária $\mathbb{S}_1^2$.

Vejamos um exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação *x: - z + 2 = 0*, onde v = (1,0, - 1), então pelo Teorema 3.2 $d(o, \Gamma_v^2) = \sqrt{2} > 1$. Pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \emptyset$. Veja a figura *1*.
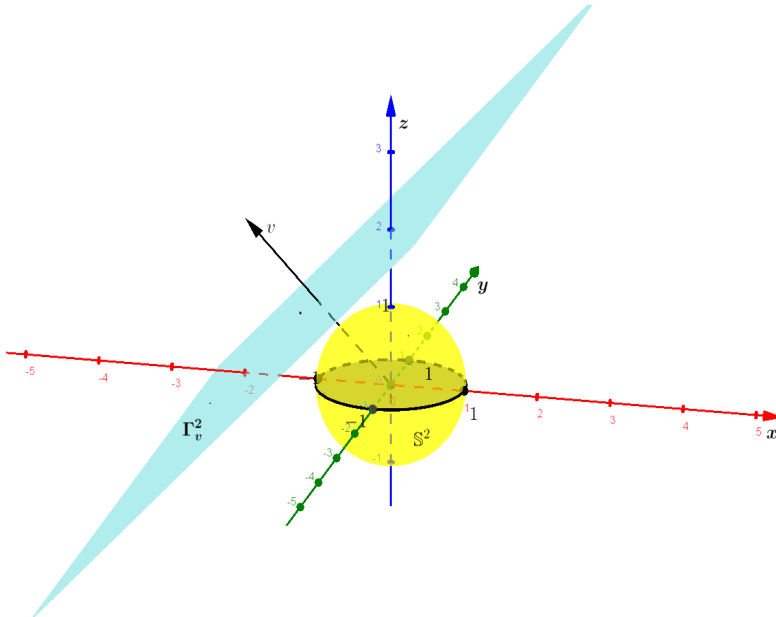
Figura 1

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.2. Se $d(o, \Gamma_v^2) = 1$, então o hiperplano Γ_v^2 é tangente ao *2*-esfera $\mathbb{S}_1^2$, no ponto *P*. Vejamos o exemplo: Consideremos o hiperplano Γ_v^2 com equação $x - z + \sqrt{2} = 0$, onde $v = (1,0,-1)$, então pelo Teorema 3.2 temos que $d(o, \Gamma_v^2) = 1$. E pelo Teorema 4.1 obtemos $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \{p\}$, onde p = $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Veja a figura *2*.
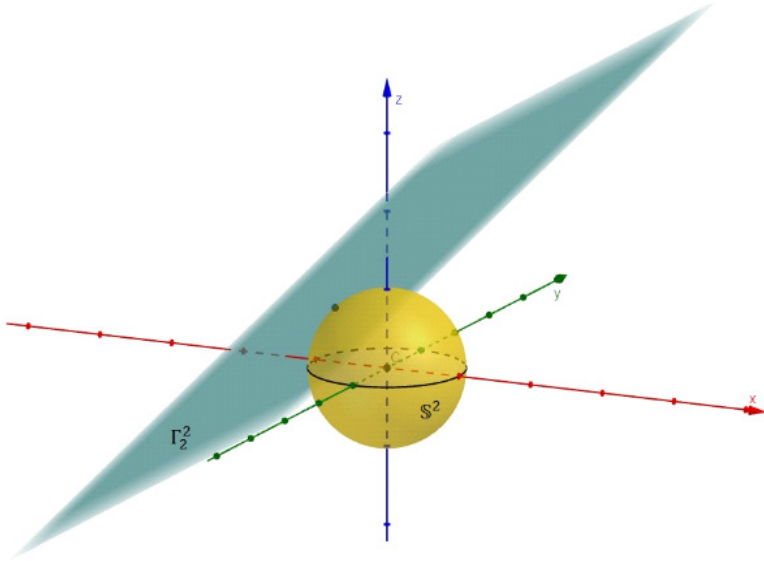
Figura 2

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

Exemplo 4.3. Se $d(o, \Gamma_v^2) < 1$ então o plano Γ_v^2 intersecta *2*-esfera $\mathbb{S}_1^2$, formando uma 1-esfera $\mathbb{S}_r^1(q)$ (circunferência) de raio $r = \sqrt{1 - d(o, \Gamma_v^2)^2}$, como mostra o seguinte exemplo:

Considere o hiperplano $\boldsymbol{\Gamma_v^2}$ com equação $y - z - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, onde $v = (0,1,-1)$, então pelo Teorema 3.2 $d(o, \Gamma_v^2) = \frac{1}{2} < 1$. E pelo Teorema 4.1 temos que $\mathbb{S}_1^2 \cap \Gamma_v^2 = \mathbb{S}_{\sqrt{3}/2}^1(q)$, onde $q = (0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$. Veja a figura *3*.
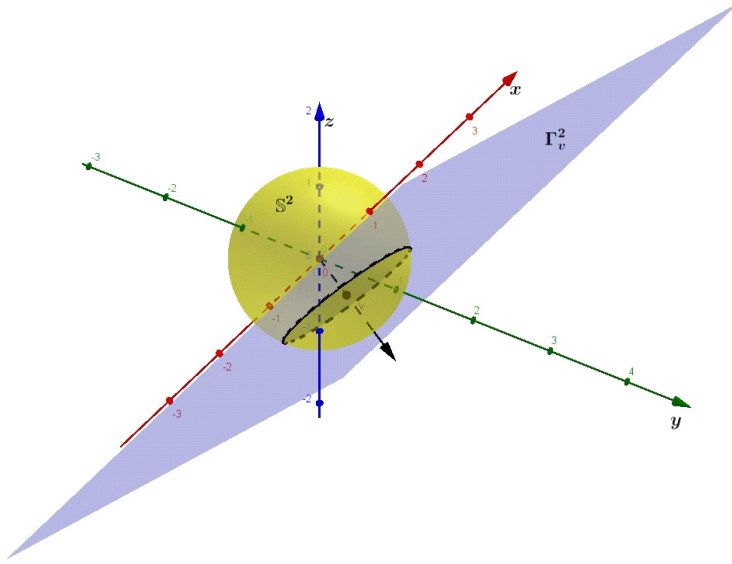
Figura 3

Fonte: (OLIVEIRA; LAMOUNIER, 2019)

5 | POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE HIPERPLANOS

Na geometria analítica plana e espacial estuda-se as posições relativas de retas e planos, que são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Aqui, estudaremos posições relativas entre hiperplanos no $\mathbb{R}^n$.

Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, observa-se intuitivamente que se Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos, o ângulo entre eles é igual a zero.

Com base no conceito de ângulo entre planos dado em (SANTOS, 2007) definimos ângulo entre hiperplanos da seguinte forma:

Definição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. O ângulo entre Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} , denotado por < (Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1}), é dado por

$$\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos^{-1}(\frac{|<u,v>|}{\|u\|\cdot\|v\|}).$$

Definição 5.2. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} *são ortogonais se o ângulo entre eles é igual a 90°.*

A próxima proposição nos dá a caracterização de hiperplanos ortogonais.

Proposição 5.1. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos com vetores normais u e v, respectivamente. Então

$$\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1} \text{ se, e somente se, } < u, v > = 0..$$

Demonstração:

$$:\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = cos(u, v) = 0 \Leftrightarrow \angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 90^o,$$

Isto é, $\Gamma_1^{n-1} \perp \Gamma_2^{n-1}$.

Definição 5.3. Dois hiperplanos Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são iguais ou paralelos se o ângulo entre eles é igual a zero.

Para demonstração da proposição seguinte precisamos do seguinte lema, cuja a demonstração pode ser vista em (COELHO, 2001).

Lema 5.1. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n ≥ 1 e *W* um subespaço próprio de *V*. Então *W* é um hiperplano se, e somente se, $dim_{\mathbb{K}} W = n - 1$.

Proposição 5.2. Sejam Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} hiperplanos, tendo como vetores normais u e v, respectivamente. Então:

i. u e v *são* colineares se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são paralelos ou iguais*;*

ii. u e v não são paralelos se, e somente se, Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1}, onde n ≥ 2.

Demonstração: *Sejam* Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} *hiperplanos distintos com vetores normais* $u = (u_1, ..., u_n)$ *e* $v = (v_1, ..., v_n)$*, respectivamente e com equações*

$$u_1x_1 + ... + u_nx_n + d_1 = 0 \quad (5)$$

e

$$v_1x_1 + ... + v_nx_n + d_2 = 0 \quad (6)$$

i) ⇒) Suponha que u *e* v *são vetores colineares, então existe* $t \in \mathbb{R}^*$ *tal que u = tv. Logo,*

$$\begin{aligned}\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) &= cos^{-1}(\frac{|< u, v >|}{\|u\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(\frac{|< tv, v >|}{\|tv\|.\|v\|}) \\ &= cos^{-1}(1).\end{aligned}$$

Daí $cos\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 1$ *e portanto* $\angle(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = 0,$*, isto é,* $\Gamma_1^{n-1} // \Gamma_2^{n-1}$ *ou* $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}$.

ii) ⇐)

a) Se $\Gamma_1^{n-1} = \Gamma_2^{n-1}.$ *, então* u = v.

b) Suponha que $\Gamma_1^{n-1}//\Gamma_2^{n-1}$, como para cada $w \in \Gamma_2^{n-1}$ existe um representante w' de w *em Γ_1^{n-1} então $\langle w', u\rangle = 0$, já que $u \perp \Gamma_1^{n-1}$. Daí temos que $\langle w, u\rangle = 0$ e sendo* w *arbitrário, então $u \perp \Gamma_2^{n-1}$. Portanto, u//v, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $u = \lambda v$.*

ii) *⇒)* Suponha u e v não paralelos, pelo item (i) Γ_1^{n-1} *e* Γ_2^{n-1} não são paralelos, ou seja, $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \neq \phi$.

Dado $p = (x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ então $p \in \Gamma_1^{n-1}$ *e* $p \in \Gamma_2^{n-1}$. . Portanto,

$$u_1x_1 + \ldots + u_nx_n + d_1 = 0 \tag{7}$$

e

$$v_1x_1 + \ldots + v_nx_n + d_2 = 0 \tag{8}$$

Suponha sem perda de generalidades que $v_n \neq 0$, então

$$x_n = -\frac{d_2}{v_n} - \frac{u_1}{v_n} - \ldots - \frac{u_{n-1}}{v_n} \tag{9}$$

Substituindo-se (9) em (7), obtemos

$$A_1x_1 + \ldots + A_{n-1}x_{n-1} + d = 0, \tag{10}$$

onde $A_i = u_iv_n - u_nv_i$, com $1 \leq i \leq n-1$, e $d = d_1v_n - u_nd_2$.

Note que esta é a equação de um hiperplano Γ_v^{n-2} com vetor normal v = (A_1, ..., A_n). Logo $p \in \Gamma_v^{n-2}$ e portanto $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} \subseteq \Gamma_v^{n-2}$.

Agora, como Γ_1^{n-1} e Γ_2^{n-1} são hiperplanos então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1}$ é também um hiperplano. Pelo lema $dim(\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-1}) = dim\Gamma_1^{n-1} - 1 =$ n -2. Como = n - 2 então $\Gamma_1^{n-1} \cap \Gamma_2^{n-1} = \Gamma_v^{n-2}$.■

6 I POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE *(n -1)* ESFERAS

Como no caso dos hiperplanos, aqui iremos apresentar as posições relativas entre (*n*-1)-esferas. Lembramos inicialmente que no espaço euclidiano duas esferas são iguais se possuem mesmo raio e o mesmo centro. E que são concêntricas se possuem o mesmo centro. No caso em que temos duas (*n*-1)-esferas a situação é a mesma. No que segue veremos como pode ser caracterizado este fato do ponto de vista da Geometria Analítica.

Proposição 6.1. Sejam $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ (n-1)-esferas de centros a = (a_1, ..., a_n) e b = (b_1, ..., b_n), respectivamente. Então:

i. $r_1 = r_2$ *e d (a, b) = 0* se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) = \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$;;

ii. $r_1 \neq r_2$ *e d (a, b) = 0* se, e somente se, $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *e* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas e não coincidentes.

Demonstração:

i) ⇒) Como $r_1 = r_2$, então

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = r_1^2 = r_2^2.$$

E sendo d(a,b) *= 0 então* a = b, *ou seja,* $a_i = b_i$, $1 \leq i \leq n$. *Daí,*

$$r_2^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2 = (x_1 - b_1)^2 + ... + (x_n - b_n)^2$$

Logo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *e portanto* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \subset \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. *Analogamente prova-se que* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) \subset \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *obtendo-se assim a igualdade.*

⇐) *Vamos provar que se* $r_1 \neq r_2$ *ou d(a, b) ≠ 0 então* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Suponha que d (a,b) ≠ 0 então a ≠ b. Se $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \phi$, nada temos a provar. Suponha então que $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \phi$, logo existe $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ tal que $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$. Daí, $x \notin \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Se $r_1 \neq r_2$, sem perda de generalidades podemos supor $r_2 > r_1$. Vamos supor também que d(a, b) = 0, caso contrário caímos no caso anterior e a proposição estará provada. Sendo assim a = b. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ então $\| x - b \| = r_2$ e daí $\| x - a \| = \| x - b \| = r_2 > r_1$ Logo $x \notin \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e portanto $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

ii) ⇒) Como d(a,b) = 0 ⇒ a = b e sendo $r_2 \neq r_1$ podemos supor sem perda de generalidades que $r_1 < r_2$. Agora, dado $x \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ então $\| x - a \| = r_1 < r_2$ e portanto $x \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$, Logo $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *e* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ são concêntricas não coincidentes.

⇐) *Sendo* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *e* $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *concêntricas então* d(a,b) *= 0. Como elas não são coincidentes, isto é,* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \neq \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$, *então pela proposição 6.1 item* (i) *temos que* $r_2 \neq r_1$. ■

Dois círculos são ditos secantes se possuem dois pontos em comum. Para (n-1)-esferas, com n > 2, o conceito é análogo.

Definição 6.1. Duas (n-1)-esferas $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ e $\mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ onde n ≥ *2*, são ditas hipersecantes se existe uma *(*n *– 2)*-esfera $\mathbb{S}_{r}^{n-2}(c)$ tal que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a) \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \mathbb{S}_{r}^{n-2}(c).$$

No caso em que n = 3 temos que $\mathbb{S}^2_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^2_{r_2}(b) = \mathbb{S}^1_r(c)$, logo as esferas $\mathbb{S}^2_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^2_{r_2}(b)$ são hipersecantes.

Proposição 6.2. Sejam $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ e $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ $(n-1)$ - esfera de centros a = (a_1, ..., a_n) e b = (b_1, ..., b_n) respectivamente. Então:

i. *d(a,b)* > $r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \emptyset$;

ii. *d(a,b)* é igual a $r_1 + r_2$ ou $|r_1 + r_2|$ se,e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \{p\}$;

iii. $|r_1 - r_2| < d(a,b) < r_1 + r_2$ se, e somente se, $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \mathbb{S}^{n-2}_r(c)$.

Demonstração:

i) ⇒) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \emptyset$, *então existe p = ($p_1$, ..., p_n)* $\in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ *e portanto* $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ *e* $p \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$. *Daí* $d(p,a) = r_1$ *e* $d(p,b) = r_2$ *Concluímos que d(a,b) ≤ d(a,p) + d(p,b) =* $r_1 + r_2$.

⇐) Suponha que $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) \neq \emptyset$, *vamos provar que d(a,b) >* $r_1 + r_2$.
Sendo $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)$ *e* $\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)$ *fechados, então*

$$d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right) = min\left\{d(x,y) | \, x \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \; e \; y \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right\}$$

$$= d(x_0, y_0) > 0,$$

Pois $\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a) \cap \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b) = \emptyset$.

Portanto,

$$d(a,b) = d\left(a, \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a)\right) + d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_1}(a), \mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b)\right) + d\left(\mathbb{S}^{n-1}_{r_2}(b), b\right) > r_1 + r_2.$$

ii)⇒) Seja $x: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *a curva que liga os pontos a e b definida por*

$$x(t) = (1-t)a + tb, \;\; 0 \leq t \leq 1,$$

onde $x(0) = a$ e $x(1) = b$.
Vamos supor inicialmente que d(a,b) = $r_1 + r_2$. *Seja* $x_0(t_0) \in \mathbb{S}^{n-1}_{r_1}$ *então*

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b - a\| t_0$$

$$= (r_1 + r_2)t_0.$$

Logo $t_0 = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$. Agora,

$$p = x(t_0) = x(\frac{r_1}{r_1 + r_2}) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} a + \frac{r_1}{r_1 + r_2} b$$

Daí, $\|p-b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2}\ \|a-b\| = r_2$. Logo $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ e portanto $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)\ \cap \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.

Vamos supor agora, sem perda de generalidades, que $r_1 > r_2$ *e que* $d(a,b) = r_1 - r_2$, *então*

$$r_1 = \|x(t_0) - a\| = \|(1-t_0)a + bt_0 - a\| = \|b-a\|t_0 = (r_1 - r_2)t_0.$$

Logo, $t_0 = \frac{r_1}{r_1+r_2}$. *Agora,* $p = x(t_0) = x\left(\frac{r_1}{r_1-r_2}\right) = -\frac{r_2}{r_1-r_2}a + \frac{r_1}{r_1-r_2}k\ \cdot$

Sendo assim, $\|p-b\| = \frac{r_1}{r_1+r_2}\|b-a\| = r_2$. *Logo* $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *e portanto* $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ $\cap\ \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$..

Sendo $x(t_0)$*, em quaisquer dos dois casos, único, então* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)\ \cap\ \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$.

$\Leftarrow$*) Supomos agora que* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)\ \cap\ \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \{p\}$, *então existe* $t_0 \in (0,1)$ *tal que* $x(t_0) = p$.

Como $p \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)$ *então* $r_1 = \|p-a\| = \|b-a\|t_0 = d(a,b)t_0$.

Enquanto que $p \in \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$ *implica que* $r_1 = \|p-b\| = |t_0 - 1|d(a,b)$.

Daí, $(t_0-1)d(a,b) = -r_2$ *ou* $(t_0-1)d(a,b) = r_2$. *Como d(a,b) > 0 então*

$\left(1-\frac{r_1}{d(a,b)}\right)d(a,b) = r_2$ *ou* $\left(1-\frac{r_1}{d(a,b)}\right)d(a,b) = -\ r_2$ *ou . Portanto* $d(a,b) = r_1+r_2$ *ou* $d(a,b) = r_1 - r_2$.

iii) Como $d(a,b)>r_1+r_2$ *pelo item (i) desta proposição temos que* $\mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)\ \cap\ \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b) = \emptyset$ *Logo, existe* $p = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}_{r_1}^{n-1}(a)\ \cap\ \mathbb{S}_{r_2}^{n-1}(b)$.. *Daí,*

$$(x_1 - b_1)^2 + \ldots + (x_n - b_n)^2 = r_2^2 \qquad (11)$$

e

$$(x_n - a_n)^2 = r_1^2 - (x_1 - a_1)^2 - \ldots - (x_{n-1} - a_{n-1})^2 \qquad (12)$$

Note que

$$(x_i - b_i)^2 = (x_i - a_i)^2 + 2(a_i - b_i)(x_i - a_i) + (a_i - b_i)^2, \text{ onde } 1 \leq i \leq n. \qquad (13)$$

De (11), (12) e (13) obtemos

$$2(a_1 - b_1)x_1 + \ldots + 2(a_n - b_n)x_n + b_1^2 + \ldots + b_n^2 - a_1^2 - \ldots - a_n^2 = r_2^2 - r_1^2$$

Portanto p pertence à um hiperplano Γ_v^{n-1}, *que tem como vetor normal* $v = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - x_n)$

Como $d(a, \Gamma_v^{n-1}\ ) < r_1$ então pela Teorema 4.1 temos que

$$\mathbb{S}_{r_1}^{n-1} \cap \Gamma_v^{n-1} = \mathbb{S}_{\sqrt{r_1^2 - k^2}}^{n-2}(\text{q}).$$

onde $\mathbb{S}_{\sqrt{r^2-k^2}}^{n-2}(q)$ *é a (n-2)-esfera contida no hiperplano* Γ_v^{n-1} *tendo q como centro, ponto de interseção* Γ_v^{n-1} *de com a reta l normal a* Γ_v^{n-1} *e que passa por a e por b. Além disso* $k = (a, \Gamma_v^{n-1})$.

7 I CONCLUSÕES

Neste artigo, estudamos as posições relativas entre o hiperplano e o n-esfera. Foi apresentado, um resultado que generaliza para o n-espaço euclidiano, o problema de como caracterizar as posições relativas: entre circunferência e reta, entre retas e entre circunferências, e finalmente entre o plano e a esfera, no caso do 3-espaço euclidiano. Destacamos o caso da caracterização da posição relativa de um hiperplano com uma (n-1)-esfera, quando a distância até o hiperplano é menor do que o raio da esfera, a interseção dos referidos objetos é uma (n-2)-esfera e não um círculo como no caso do 3-espaço euclidiano.

REFERÊNCIAS

COELHO, F. Uchoa.; LOURENÇO, M. L.. **Um curso de álgebra linear.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

HONIG, C. S. **Aplicações da topologia `a análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

KREYZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: Jonh Wiley & Sons, 1978.

LANG, S.. *Álgebra* **linear:** traduzido da terceira edição em inglês. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L.. **Curso de análise** Vol.2. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

MILLMAN, R. S.; PORKER, G. D. **Elements of Differential Geometry.** New Jersey: Prentice Hall, 1977.

MENDELSON, B.. **Introduction to topology.** New York: Dover Publications, 1990.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F**. Hiperplano e n(n-1)-esfera: posições relativas**. RCT-Revista de Ciência e Tecnologia. v.1.n.1, 2015.

OLIVEIRA, J.; LAMOUNIER, W. F. **Relative positions between the hyperplane and the n-sphere.** RCT – Revista de Ciência e Tecnologia. v.5.n.8, 2019.

SANTOS, N. M.. **Vetores e matrizes: uma introdução a álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2007.

SPIVAK, M**. O cálculo em variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2003.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

CAPÍTULO 16

CRIVO PARA NÚMEROS PRIMOS E TESTE DE PRIMALIDADE BASEADOS EM UMA MATRIZ DE OITO COLUNAS

Data de aceite: 01/03/2021

Gabriel Pastori Figueira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão - Paraná
http://lattes.cnpq.br/4477456426705313

Fernando Cézar Gonçalves Manso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão - Paraná
http://lattes.cnpq.br/2920136847904900

Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campo Mourão - Paraná
http://lattes.cnpq.br/1045931096324971

RESUMO: A definição de um número primo é muito simples: um número é dito primo se for um inteiro maior do que 1 e se possuir como divisores somente o número 1 e ele mesmo. Apesar disso, origina-se dessa simplicidade uma série de dificuldades, dentre elas, a de se determinar a primalidade e a de se gerar números primos. Dessa forma, este estudo busca comparar computacionalmente os algoritmos derivados de uma matriz de oito colunas contendo todos os inteiros positivos maiores do que 1, com exceção dos múltiplos de 2, 3 e 5, com outros convencionais, tanto para o teste de primalidade quanto para a geração de números primos. O código desenvolvido para a geração de números primos possui vantagens quando comparado ao do crivo de Eratóstenes, enquanto o código desenvolvido para o teste de primalidade possui vantagens quando comparado a um dos dois algoritmos de divisão sucessiva levados em consideração.

PALAVRAS-CHAVE: Números primos, Crivo, Teste de primalidade, Teoria dos Números.

SIEVE FOR PRIME NUMBERS AND PRIMALITY TEST BASED ON A EIGHT COLUMN MATRIX

ABSTRACT: The definition of a prime number is very simple: a number is prime if it is an integer greater than 1 and if it has only 1 and itself as a divisor. Despite this, a series of difficulties arise from this simplicity, amongst them, determining the primality of a number and generating prime numbers. Thus, this study seeks to compare computationally the algorithms derived from an eight-column matrix containing all positive integers greater than 1, except the multiples of 2,3, and 5, with conventional algorithms, both for primality test and for the generation of primes. The code developed for the generation of primes possesses advantages when compared with the sieve of Eratosthenes, whereas the code developed for the primality test has advantages when compared to one of the two successive division algorithms taken into consideration.

KEYWORDS: Prime numbers, Sieve, Primality test, Number theory.

1 | INTRODUÇÃO

A determinação da primalidade e a geração de uma lista de números primos possuem uma série de aplicações, dentre elas, criptográficas. Nesse sentido, é preciso conhecer diversos algoritmos para cada uma dessas funcionalidades. Dentre esses algoritmos, encontram-se os que se originam de uma matriz de 8 colunas presente em (SHOGREN; YATES, 1966). Tal matriz permite remover mais facilmente os números compostos da lista de números primos por meio de operações entre os seus próprios elementos e, também, testar a primalidade de um inteiro positivo qualquer utilizando-se da congruência modular.

2 | MATERIAIS E MÉTODOS

Os algoritmos para o teste de primalidade e para a geração de números primos foram implementados utilizando a linguagem de programação C++, sem o uso de multi threads, e estão disponíveis em (FIGUEIRA, 2019). Para a aferição dos tempos de execução dos programas desenvolvidos foi utilizado a biblioteca ctime, nativa da linguagem. Para facilitar a visualização foi também desenvolvido, utilizando ferramentas de desenvolvimento web, uma página que recebe o tempo entre eliminação de compostos e o número de linhas da matriz, gerando uma animação dos procedimentos executados, disponível em (FIGUEIRA, 2019).

O algoritmo do teste de primalidade por meio da matriz de oito colunas teve o seu tempo aferido e foi comparado com dois algoritmos que utilizam da divisão sucessiva, também implementados em C++. O algoritmo para a geração de números primos por meio da matriz de oito colunas teve o seu tempo aferido e foi comparado com o algoritmo do crivo de Eratóstenes, também implementado em C++.

Todos os testes de desempenho - tempo de execução - foram feitos em mesmas condições, ou seja, com o sistema em estado de inicialização e com as mesmas configurações tanto de software quanto de hardware.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Excluindo os múltiplos de 2, 3 e 5 é possível montar uma matriz , cuja lei de formação é:

$$a_{mn} = 30 \times m + a_{0n} \quad (1)$$

Onde $1 \leq n \in \mathbb{Z} \leq 8$ e $a_{01} = 7$, $a_{02} = 11$, $a_{03} = 13$, $a_{04} = 17$, $a_{05} = 19$, $a_{06} = 13$, $a_{07} = 19$, $a_{08} = 31$.

Todos os números não primos da matriz A podem ser obtidos por meio de multiplicações de elementos da mesma e, portanto, a partir dessa matriz pode-se encontrar todos os números primos, com exceção de 2, 3 e 5.

Para se obter todos os números primos maiores do que 5 até um dado valor inteiro *N*, basta gerar a matriz A até a linha que contém o primeiro elemento com valor igual ou maior do que *N* e eliminar, i.e, marcar como composto, o produto entre elementos da matriz k_1 e k_2, de forma que (k_1 x k_2) ≤ N.

A Figura 1 possui uma imagem com a representação da matriz A contendo 10 linhas.

7	11	13	17	19	23	29	31
37	41	43	47	49	53	59	61
67	71	73	77	79	83	89	91
97	101	103	107	109	113	119	121
127	131	133	137	139	143	149	151
157	161	163	167	169	173	179	181
187	191	193	197	199	203	209	211
217	221	223	227	229	233	239	241
247	251	253	257	259	263	269	271
277	281	283	287	289	293	299	301

Figura 1. Matriz A com 10 linhas, contém todos os números primos entre 7 e 301.

As eliminações realizadas na matriz da Figura 1 foram as seguintes:

- (7×7);(7×11);(7×13);(7×17);(7×19);(7×23);(7×29);(7×31);(7×37);(7×41);(7×43);
- (11×11); (11×13); (11×17); (11×19); (11×23);
- (13×13); (13×17); (13×19); (13×23);
- (17×17).

É possível, à partir da matriz A, elaborar um teste de primalidade determinístico para um natural *N* qualquer. Tal teste constitui-se de congruências modulares do tipo:

$$L_i \equiv (30 * x^2 + (c_a + c_b) * x + \zeta_0 \ ) \ mod \ (30 * x + c_a \ ) \tag{2}$$

$$L_i \equiv (30 * x^2 + (c_a + c_b) * x + \zeta_0 \ ) \ mod \ (30 * x + c_b) \tag{3}$$

Sendo L_i dado por:

$$L_i = \frac{N - L_0}{30} \tag{4}$$

E ζ_0 dado por:

$$\zeta_0 = \frac{c_a \times c_b - L_0}{30} \tag{5}$$

L_0 pode assumir qualquer valor da linha zero da matriz.

Se L_i não é inteiro, *N* não está na matriz e, portanto, é composto, a menos que seja 2, 3 ou 5.

As variáveis c_a e c_b representam os elementos da linha 0 e das colunas a e b, respectivamente. Sabe-se que o produto entre elementos das colunas a e b, independente da linha em que esses estejam, sempre irá resultar em números que estão numa mesma coluna da matriz e, portanto, é possível determinar previamente as colunas em que os produtos entre pares de colunas irão se situar. Assim, as colunas, e os pares de colunas que quando multiplicados levam a elas, respectivamente, são:

- 1° coluna: (1,8); (2,4); (3,5); (6,7);
- 2° coluna: (1,6); (2,8); (3,4); (5,7);
- 3° coluna: (1,5); (2,6); (3,8); (4,7);
- 4° coluna: (1,2); (3,7); (4,8); (5,6);
- 5° coluna: (1,1); (2,7); (3,3); (4,4); (5,8); (6,6);
- 6° coluna: (1,7); (2,3); (4,5); (6,8);
- 7° coluna: (1,4); (2,5); (3,6); (7,8);
- 8° coluna: (1,3); (2,2); (4,6); (5,5); (7,7); (8,8).

Os testes de congruência devem ocorrer enquanto $L_i \geq (30*x^2 + (c_a+c_b)*x + \zeta_0)$, com $x \in \mathbb{N}$. Se para algum x, a equação (2) ou a equação (3) for verdadeira, *N* é composto, caso contrário, é primo.

Por exemplo, para determinar a primalidade de 1787, deve-se realizar a seguinte sequência de passos:

Calcula-se a linha em que se encontra 1787:

$$L_i = \frac{1787 - 17}{30} = 59 \tag{6}$$

Ou seja, 1787 é um elemento da linha 59, e da coluna 4.

Agora, realiza-se os testes de congruência presentes na equação (2) e na equação (3).

- x = 0

$$59 \equiv 2 \; mod \; (7): falso \quad (7)$$

$$59 \equiv 2 \; mod \; (11): falso \quad (8)$$

$$59 \equiv 12 \; mod \; (13): falso \quad (9)$$

$$59 \equiv 12 \; mod \; (29): falso \quad (10)$$

$$59 \equiv 17 \; mod \; (17): falso \quad (11)$$

$$59 \equiv 17 \; mod \; (31): falso \quad (12)$$

$$59 \equiv 14 \; mod \; (19): falso \quad (13)$$

$$59 \equiv 14 \; mod \; (23): falso \quad (14)$$

- x = 1

$$59 \equiv 50 \; mod \; (37): falso \quad (15)$$

$$59 \equiv 50 \; mod \; (41): falso \quad (16)$$

Como todos os testes são falsos, tem-se que 1787 é primo.

Já para o número 1793, tem-se a seguinte sequência de passos:

Calcula-se a linha em que se encontra 1793:

$$L_i = \frac{1793 - 23}{30} = 59 \quad (17)$$

Portanto, 1793 é um elemento da linha 59, e da coluna 6.

Agora, realiza-se os testes de congruência presentes na equação (2) e na equação (3).

- x = 0

$$59 \equiv 6 \; mod \; (7): falso \quad (18)$$

$$59 \equiv 6 \; mod \; (29): falso \quad (19)$$

- x = 1

$$59 \equiv 4 \; mod \; (11): verdadeiro \quad (20)$$

Como a equação (20) é verdadeira, tem-se que 1793 é composto, e pode ser escrito da forma 11 x 163.

Os algoritmos levados em consideração, para a comparação do desempenho do teste de primalidade, são os seguintes:

- p1: algoritmo baseado na matriz de oito colunas;
- p2: algoritmo que verifica se um número natural N qualquer é divisível por algum número entre 2 e $\sqrt{N}$ (utilizando iteração igual a uma unidade), se for, N é composto, caso contrário, é primo;

- p3: algoritmo que usa do fato de que todo número primo pode ser escrito da forma 6 * k ± 1 (com exceção de 2 e 3) com $k \in \mathbb{N}^*$. Verifica se um número natural N qualquer é divisível por 2 ou 3 e , então, verifica se é divisível por algum número menor que $\sqrt{N}$ da forma 6 * k ± 1, se for, N é composto, caso contrário, é primo.

Na Figura 2, há um gráfico com a comparação entre os três algoritmos (p1, p2 e p3).
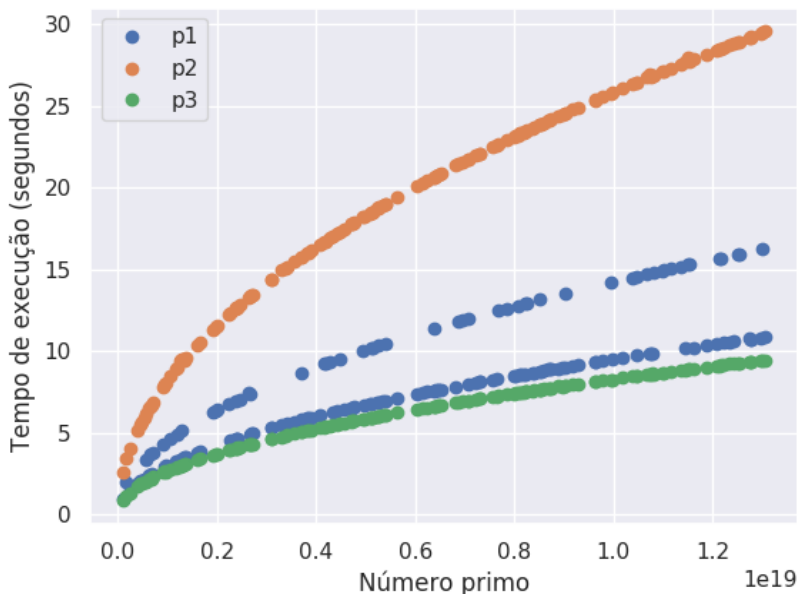
Figura 2. Gráfico contendo os tempos de execução dos três algoritmos para o teste de primalidade.

Já para a geração de números primos até um limite superior N, foram utilizados os seguintes algoritmos:

- c1: algoritmo baseado na matriz de 8 colunas;

- c2: crivo de Eratóstenes, nesse elimina-se, isto é, marca-se como composto, os múltiplos até N de todos os primos até (WEISSTEN, 2019).

Na Figura 3, há um gráfico com a comparação entre os dois algoritmos (c1 e c2) para geração de números primos.
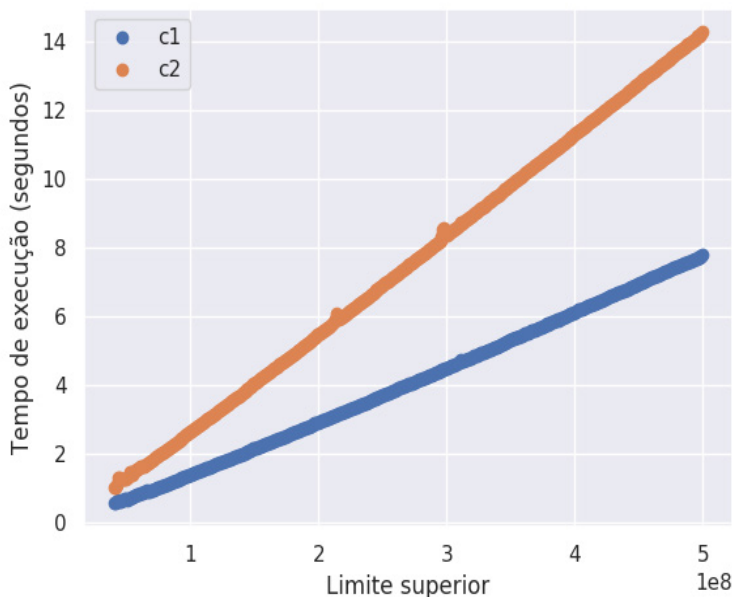
Figura 3. Gráfico contendo os tempos de execução dos dois algoritmos para a geração de números primos.

4 I CONCLUSÃO

Observa-se na Figura 2 que o algoritmo desenvolvido com base na matriz de oito colunas (p1) possui desempenho similar ao algoritmo p3 para os números que não estão nas colunas 5 e 8, sendo o desempenho consideravelmente pior para os números que estão nessas colunas. Em relação ao algoritmo p2, o algoritmo p1 se mostra em grande vantagem em todos os casos avaliados.

Observa-se na Figura 3, que o algoritmo desenvolvido com base na matriz de oito colunas (c1) possui desempenho consideravelmente superior, quando comparado ao crivo de Eratóstenes (c2).

REFERÊNCIAS

FIGUEIRA, G. P. **Matriz de oito colunas**. Disponível em: https://github.com/gabrielpastori/prime-algos. Acesso em: 18 ago. 2019.

SHOGREN, M.; YATES, R. **A SIEVE FOR PRIMES p>5**. The Mathematics Teacher, v. 59, n. 1, 1966, p. 24–28. JSTOR. Disponível em: www.jstor.org/stable/27957261. Acesso em 31 dez. 2020.

WEISSTEIN, E. W. **Sieve of Eratosthenes**. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/SieveofEratosthenes.html. Acesso em: 14 ago. 2019.

CAPÍTULO 17

AS CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA CHINESA PARA O ENSINO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE MULTIPLICAÇÃO

Data de aceite: 01/03/2021

Iago Alves dos Santos
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Danilo Furtado Veras
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Wirlania Cristina Santos Nunes
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Rayane de Jesus Santos Melo
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

RESUMO: Diante das dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado da operação de multiplicação pelo método convencional (tabuada), pensou-se em propor um método não usual que poderia contribuir no processo ensino-aprendizagem. A partir disso, delineou-se como objetivo deste artigo apresentar uma sequência didática que utiliza o Método Chinês como uma possibilidade para o ensino da operação de multiplicação na Educação Básica. Assim, inicialmente, elaborou-se uma sequência didática; em seguida, realizou-se sua aplicação em duas escolas públicas municipais, uma de Paço do Lumiar – MA e outra de São Luís - MA e, finalizando, analisou-se os resultados. Com base na aplicação, constatou-se que os alunos obtiveram maior motivação e desempenho na resolução de problemas que envolvia tal operação, por conta da metodologia diferenciada, da praticidade e simplicidade do método. Com isso, acredita-se que esta pesquisa, pode contribuir positivamente para o contexto educacional, pois permite abrir um leque de possibilidades para o ensino desta operação, tendo em vista que, os resultados foram satisfatórios.

PALAVRAS-CHAVE: Proposta Pedagógica, Educação Matemática, Operação Matemática.

ABSTRACT: Ahead of the difficulties found for the students in learning the multiplication operation by the conventional method (multiplication table), it was thought to propose an unusual method that could contribute to the teaching-learning process. From this, it was delineated as objective of this article to present a didactic sequence that uses the Chinese Method as a possibility for the education of the operation of multiplication in the Basic Education. Thus, initially, a didactic sequence was elaborated; then, it was applied in two municipal public schools, one in Paço do Lumiar - MA and the other in São Luís - MA and, finishing, the results were analyzed. On the basis of the application, evidenced that the students had gotten greater on account motivation and performance in the resolution of problems that involved such operation, of the differentiated methodology, of the practicality and simplicity of the method. Thus, it is believed that this research can contribute positively for the educational context, because it allows to open a lot of possibilities for the education of this operation, in view of that, the results had been satisfactory.

KEYWORDS: Pedagogical Proposal, Mathematical Education, Mathematical Operation.

1 I INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos as formas de ensinar e aprender matemática passaram por diversas mudanças buscando por melhorias e através dessas mudanças, os métodos antigos foram ganhando novas roupagens, na tentativa de se adaptar às novas necessidades encontradas. Com isso, a sociedade foi se adaptando às novas metodologias de ensino, onde foram convencionadas maneiras de se compreender tais cálculos. Tudo que se tem hoje é fruto de estudos realizados no passado, por estudiosos que dedicaram suas carreiras a isso.

E por consequência, o conceito atribuído pela maioria dos alunos é que a disciplina é difícil, cansativa e desagradável. Com base nisso, Pais (2013, p. 13) afirma que:

> [...] Existe uma grande distância entre o que pode ser realizado e que a efetividade dessa realização possível. E para que essa distância seja superada, é importante observar muitos fatores, como: formação de professores, redefinições de métodos, expansão dos atuais campos de pesquisa, criação e diversificações de estratégias e também algumas quebras de paradigmas.

Ao se tratar da operação básica de multiplicação percebe-se que quando os alunos não compreendem tal assunto, as dificuldades encontradas, futuramente, serão maiores, já que, ele é pré-requisito para os próximos conteúdos. Diante disso, nesta investigação buscamos responder alguns questionamentos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem os quais são: “*Como ensinar a operação matemática de multiplicação por meio do método chinês?” e “Diversificar os métodos de ensino de multiplicação contribui para o ensino desta operação matemática?”.*

Para responder esses questionamentos, traçamos como objetivo apresentar uma sequência didática que propõe o método chinês para o ensino da operação de multiplicação e os resultados obtidos com sua aplicação. Especificamente, construir uma sequência didática para o ensino da operação de multiplicação pelo método chinês; descrever a aplicação da sequência didática previamente elaborada; e analisar o nível dos alunos em relação a questões que envolvem as operações de multiplicação, após participação na sequência didática. Optamos por utilizar uma sequência didática, pois ao organizá-la

> [...] o professor poderá incluir atividades diversas como leitura, pesquisa individual ou coletiva, aula dialogada, produções textuais, aulas práticas, etc., pois a sequência de atividades visa trabalhar o conteúdo específico, um tema ou um gênero textual da exploração inicial até a formação de um conceito uma ideia, uma elaboração prática, uma produção escrita. (BRASIL, 2012, p. 21).

Acreditamos que esta pesquisa abrirá um leque de possibilidades na inserção de novos métodos de ensino, os quais podem ser utilizados pelos professores, como ferramentas auxiliares, no que se refere à multiplicação. E que, para os alunos, poderá ser como ponte que levará a esse conhecimento de maneira mais simplificada, sem precisar do

uso da repetição e, por sua vez, despertará curiosidade dos mesmos, devida à aplicação de uma metodologia não usual.

2 | O ENSINO DE MULTIPLICAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Sabe-se que a componente curricular de matemática possui, assim como outras componentes curriculares, diversos tipos de conteúdos e cada um tem suas particularidades – regras, símbolos e modo de pensar – e que na maioria das vezes, alguns desses, são confundidos. Por exemplo, no ensino da aritmética e álgebra, Lorenzato (2010, p.57) nos fala sobre a diferença básica entre esses dois conteúdos:

> [...] a aritmética é pontual e numérica, enquanto a álgebra é generalista e literal. Por exemplo, diante do enunciado 'tenho 7 vezes o que você tem e, juntando o que nós temos, dá 104', na aritmética se pensa 104 ÷8, enquanto, na álgebra, se pensa: $7x + x = 104$.

Dentro do campo da aritmética, é possível identificar inúmeros erros cometidos pelos alunos em relação aos cálculos das quatro operações básicas. Lorenzato (2010, p.63) nos exemplifica: "É comum, em aritmética, alunos fazerem corresponder 3(4 +5) erroneamente a 12 + 5". Percebe-se que, com essas dificuldades, e, em alguns casos, com a formação deficiente do próprio educador, os alunos consideram a disciplina difícil e desinteressante. No ensino da multiplicação não é diferente, e, portanto, é de extrema importância buscar novos métodos de ensino para que essa realidade possa ser modificada.

O estudo da multiplicação já se insere no contexto escolar visando o desenvolvimento do pensamento numérico dos alunos, por meios de situações de aprendizagem. Assim, os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoarem suas formas de calcular. Sendo de suma importância superar a forma mecanizada de memorização de regras e algoritmos. Os alunos precisam de alguns conceitos e procedimentos para a resolução dos problemas a serem encontrados. Dessa forma que a multiplicação é estabelecida como relação entre ela e a adição, sendo apresentada como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo: João necessita comer três castanhas do Pará durante 4 dias. Quantas castanhas, no total, ele comerá? Assim, associa-se a escrita 4 x 3, na qual se definem papéis diferentes para o 4 (número de repetições) e para o 3 (número que se repete), não sendo possível tomar um pelo outro. Essa escrita apresenta-se como uma forma abreviada da escrita: 3 + 3 + 3 + 3.

3 | O MÉTODO CHINÊS PARA O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO

O método chinês utilizado para o ensino da multiplicação, neste estudo, consiste em resolver operações com mais praticidade, facilidade e precisão. Para isso, esta pesquisa se baseou em Oliveira (2015), Cajori (2007) e Zonzini (2016).

O método consiste em fazer a multiplicação de números naturais, de maneira lúdica, por intermédio de retas paralelas e perpendiculares. Na antiguidade, os chineses utilizavam varetas de bambu, na qual Cajori (2007, p.118) afirma que "[...] elas eram colocadas sobre a prancha e remanejadas com o andamento da computação. [...] o produto era colocado entre o multiplicando e o multiplicador". Oliveira (2015 p.19) ressalta ainda que:

> O método chinês de multiplicação é um método simples e de contagem de pontos, talvez bastante semelhante com os processos em que os educandos desenham bolinhas ou outros objetos dispostos em linhas e colunas que facilitam a contagem dos referidos objetos. Entretanto, é um processo mais elaborado e que trabalha de maneira consistente o valor posicional através dos agrupamentos de varetas tornando mais claro o estudo dos valores posicionais.

Fazendo analogia às varetas de bambu utilizadas pelos chineses, na utilização do método as retas correspondem ao número desejado e o cruzamento as operações. Por exemplo, ao se multiplicar 5 × 3 (unidades) é necessário criar três retas diagonais paralelas entre si, e, logo em seguida, cinco retas na diagonal contrária, também paralela entre si, conforme na Figura 1. Porém, ao se tratar de dezenas, há uma necessidade de separar a dezena da unidade, por exemplo, 16 × 26. Inicialmente faz-se a separação: (10 + 6) × (20 + 6), representado na Figura 2.
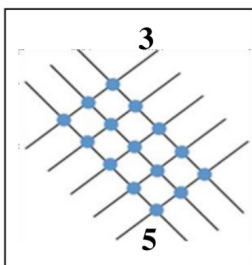
Figura 1 – Representação do produto de 3 × 5
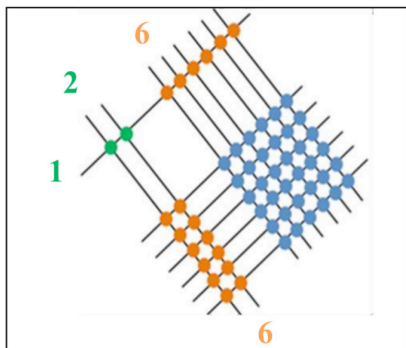
Figura 2 – Representação do produto de (10 + 6) × (20 + 6)

No primeiro caso, notam-se cinco diagonais representando cinco unidades. E três diagonais representando três unidades. Zonzini (2016, p.12) diz que “para chegar ao produto os pontos de interseção das varetas são levados em consideração e contados”, ou seja, o cruzamento representa a operação de multiplicação. Desse modo, na Figura 1 há um total de 15 pontos, sendo este o produto da operação.

No segundo caso, nota-se uma diagonal isolada e um pouco distante, paralela a ela, outras seis diagonais, representando 1 dezena e 6 unidades, formando o número 16. Concorrente a ela tem-se duas diagonais e mais à frente outras seis, representando duas dezenas e seis unidades, formando o número 26.

Como já foi citado, o cruzamento representa a operação multiplicativa. O segundo caso se diferencia do primeiro, em parte, na sua resolução. Começa-se a contar da direita para a esquerda. Os pontos da direita (azul) representam as unidades (0 – 9), os pontos no meio (laranja) representam as dezenas (10 – 99) e os pontos da esquerda (verde) representam as centenas (100 – 999), se aparecer algum número que ultrapasse o limite das unidades e dezenas deve-se somar aos pontos da esquerda (Figura 5). Vale ressaltar que, para este método, necessariamente na multiplicação por dezenas, a quantidade de pontos obtidos, seja nas unidades ou nas dezenas, não pode ser superior a 9 (nove).

Note que na Figura 3 tem-se 36 pontos azuis, mas sabe-se que só pode haver, no máximo, 9 unidades, então se escreve (30 + 6), três dezenas e seis unidades. Ficando apenas seis unidades e “passa-se” as três dezenas para a esquerda, somando-se aos pontos, que já estão lá. Têm-se, também, os pontos laranja que estão no meio das figuras e precisa-se somar a quantidade de pontos (Figura 4).
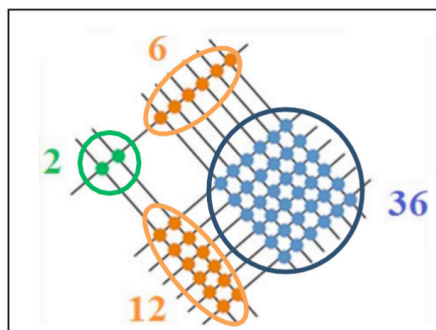
Figura 3 – Quantidades de pontos obtidos no cruzamento das diagonais
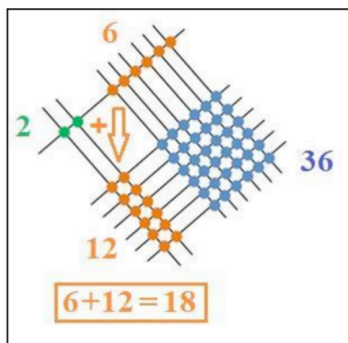
Figura 4 – Soma dos pontos laranja que corresponderá a dezena do número

Após essas mudanças, passa-se o excesso para o lado esquerdo e soma-se (Figura 5). É importante lembrar que o número que muda de local vai como valor absoluto.
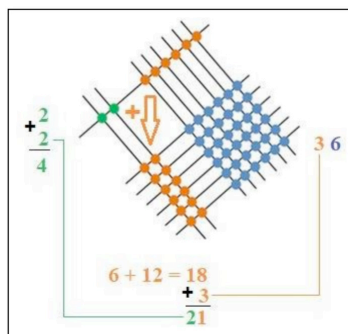
Figura 5 – Retirando o excesso dos números e somando-os com os pontos à esquerda

Feito a soma, os números que sobraram devem ser juntados a fim de obter o resultado da operação (Figura 6).
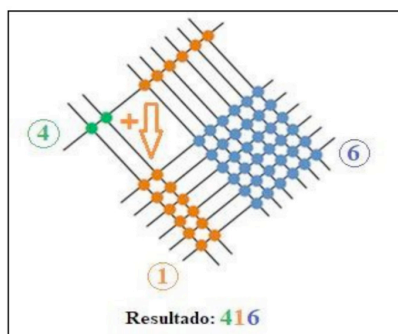
Figura 6 – União da quantidade de pontos obtidos em cada cruzamento

Por fim, é necessário falarmos, também, sobre a representação do número zero. Na Babilônia, por mais de 15 séculos os matemáticos ignoraram o zero. Por esse motivo, não era possível diferenciar certos números, por exemplo, 7.230, 72.300 e 723.000. Essas situações causavam muitas confusões. Porém, segundo Silveira (2015, p.19), "pouco a pouco, eles foram percebendo que, para evitar confusão nas representações numéricas, precisavam representar o 'nada' por 'alguma coisa'". O símbolo, que serviria graficamente para marcar a ausência das unidades de certa ordem, seria o zero.

No método chinês para representação do número zero, ilustramos essa ausência de unidades em certa ordem (unidade, dezena, centena, unidade de milhar e etc.) por uma linha tracejada ou ondulada. Por exemplo, ao multiplicar 20 × 45, representamos o número vinte por duas retas contínuas e, separadamente, uma linha tracejada ou uma ondulada para ilustrar o número zero, de acordo com a Figura 7 (linha tracejada à esquerda) (linha ondulada à direita).
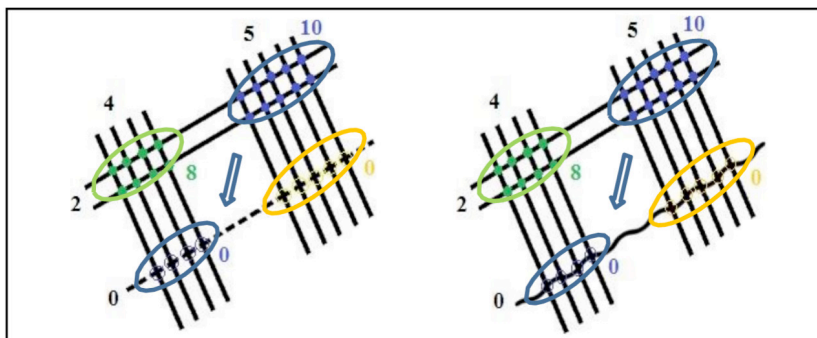
Figura 7 – Representação da operação **20** × **45** com a linha tracejada e ondulada

É importante destacar que as linhas onduladas e tracejadas possuem o valor nulo, logo, qualquer intersecção, destas, com quaisquer tipos de linhas, obtém o valor zero, já que o produto de qualquer número natural por zero tem como resultado zero.

A resolução desta operação é semelhante ao da Figura 6, atentando apenas nos valores nulos, conforme a Figura 8.
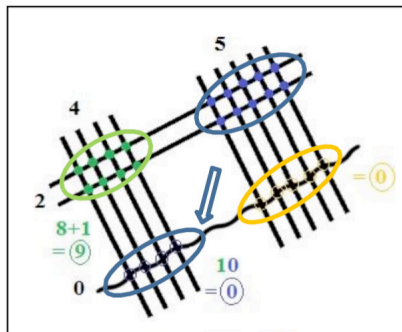
Figura 8 – Resultado da operação **20** × **45**, com a linha ondulada

4 I ASPECTOS METODOLÓGICOS

Com base nos objetivos delineados e supracitados, optamos para esta pesquisa pela abordagem qualitativa, pois, segundo Oliveira (2002, p. 117):

> As pesquisas que se utilizam da abordagem qualitativa possuem a facilidade de poder descrever a complexidade de uma determinada hipótese ou problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir, em maior grau de profundidade, a interpretação das particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos.

Para a coleta de dados, foram criados questionários envolvendo a operação matemática de multiplicação, o qual possuíam 10 questões sem alternativas. Tais instrumentos foram aplicados no início e no final da sequência didática, a fim de aferir o nível de conhecimento dos alunos.

A sequência didática foi aplicada em duas escolas, uma da rede municipal de Paço do Lumiar – MA e outra da rede municipal de São Luís – MA. Na primeira, a proposta foi em uma turma do 9º ano, no contraturno dos alunos; e na segunda, em uma turma do 8º ano, no horário regular de aula.

Entendemos sequência didática, com base em Oliveira (2013), quando afirma que ela:

> É um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem.

Para fase de análise dos dados, buscamos descrever a relação entre variáveis nos dois questionários (primeira e última etapa), por meio de gráficos. E, com isso, verificamos a eficiência das resoluções dos exercícios, a compreensão das questões, o conhecimento e a assertividade de cada um.

5 I DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

5.1 Aplicação da Sequência Didática

A sequência didática foi dividida em quatro etapas. Na primeira, nos apresentamos aos alunos, logo em seguida, perguntamos sobre as principais dificuldades nas operações de multiplicação de números naturais. A resposta da maioria dos alunos foi que a maior dificuldade encontrada por eles foi: na multiplicação por dezenas. Segundo o aluno João: *"Multiplicação é fácil, até o número 10. Passou disso, fica difícil".*

Após isso, falamos sobre o método que iria ser trabalhado com eles e sobre a praticidade e a facilidade, que ele traz ao se fazer operações de multiplicação, tanto por unidades quanto por dezenas. Só então, foi feita a aplicação (Foto 1) do "Questionário I" que continha 10 questões envolvendo a operação já citada.

Foto 1 – Execução do Questionário I

Nesta primeira etapa, notou-se um pouco de descontentamento dos alunos em relação à aplicação do Questionário I, uma vez que eles não esperam "uma prova" na primeira etapa, conforme é possível observar no discurso da aluna Ana: *"ah, não professor. Não ia ser uma aula? Por que fazer essa prova?"*. Então explicamos que o questionário não passava de um "termômetro" para saber em que nível eles estavam. Estabelecemos um tempo máximo de 1 hora e 30 minutos para a resolução do mesmo. Vale ressaltar que nesta primeira etapa os alunos nem se esforçaram muito, pois grande parte das questões foi deixada em branco. Ao terminar o tempo recolhemos os questionários. E explicamos que voltaríamos para a aplicação da sequência didática.

Na segunda etapa, foi ensinada a multiplicação de unidade por unidade, onde foram mostradas as especificidades do método. Após isso, foram feitos alguns exemplos e, posteriormente, foi entregue uma lista de exercícios para a fixação do conteúdo. Demos a oportunidade de cada aluno ir ao quadro tentar resolver, e com isso, incentivar os demais.

Na terceira etapa, foi ensinada a multiplicação de dezena por dezena, mostrando a leve diferença entre a segunda etapa. Durante esta etapa, o aluno Pedro questionou: *"Professor(a), por que os professores não ensinam esse método? Aquele outro é um pouco complicado, porque a gente tem que decorar, esse basta saber contar.* Um outro questionamento que nos chamou a atenção foi quando um aluno nos perguntou se o método era válido para utilizar nas provas ou exercícios de matemática do professor regular.

E por último, na quarta e última etapa, entregamos o Questionário II (Foto 2), semelhante ao primeiro, porém em algumas questões trocamos apenas os valores, a fim de que os alunos não colocassem apenas as respostas, mas a forma de resolução (pelo método ensinado), já outras foram substituídas, no entanto com a mesma proposta/nível de resolução. Já nesta etapa, diferentemente da primeira, os alunos se esforçaram um pouco na resolução das questões.

Foto 2 – Execução do Questionário II

5.2 Análise dos dados

Após concluirmos a aplicação da sequência didática, partimos para a correção dos dois questionários aplicados para verificar o desempenho de cada aluno e, se a nossa proposta pedagógica contribuiu, ou não, para a aprendizagem dos mesmos. Para isso, verificaríamos se a assertividade dos alunos havia aumentado, igualado ou diminuído após a aplicação da sequência didática, para isso criamos gráficos para facilitar a visualização.

Nos gráfico a seguir é possível observar que a maioria dos alunos, tanto do 9º ano quanto do 8º ano, apresentados com nomes fictícios, tiveram um rendimento maior na resolução do segundo questionário do que no primeiro. Verificamos, após a análise dos resultados obtidos, que a nossa proposta foi bem-sucedida.
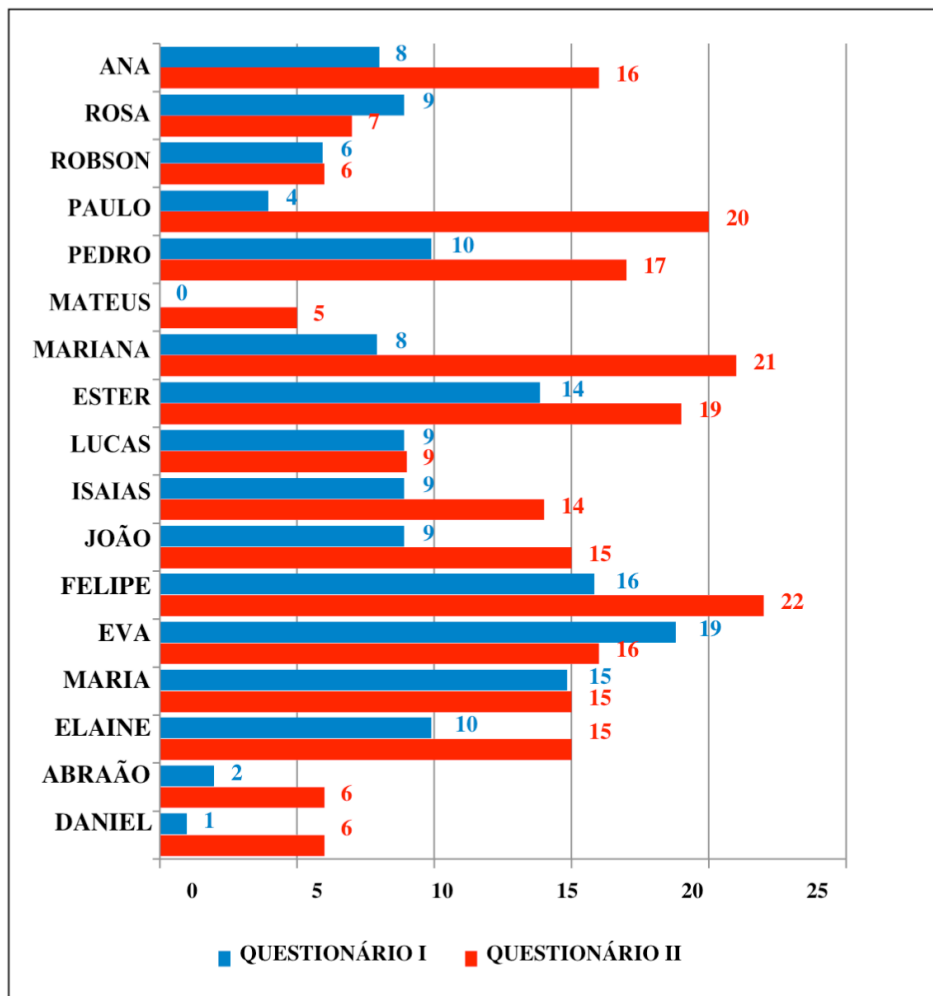
Gráfico 1 – Número de Acertos por questionário dos alunos do 9º ano

Em seguida, montamos um comparativo entre os dois questionários aplicados nas duas turmas, analisando o número de acertos de cada questão (Gráfico 2). Onde as barras correspondem a quantidade de alunos que acertaram a determinada questão, no primeiro questionário, já o de linhas corresponde à quantidade de alunos que acertaram, no segundo questionário.
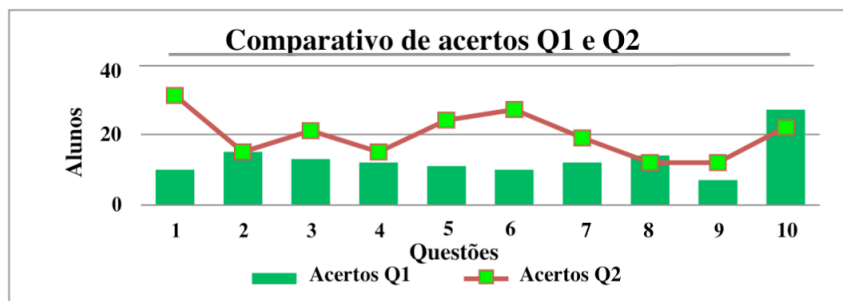
Gráfico 2 – Comparativo dos acertos Questionário I e Questionário II

Podemos verificar que o número de alunos que responderam de forma correta as questões do segundo questionário, na maioria das questões, se sobressaiu às do primeiro questionário. Notamos um grande avanço por parte dos alunos e verificamos que com essa metodologia não convencional pudemos despertar o interesse de uma maior quantidade de alunos sobre a operação e por consequência maior compreensão na realização da operação de multiplicação de números naturais. Como diz D'Ambrosio (2012, p. 82) "os alunos têm naturalmente grande potencial criativo, porém orientado em direções imprevistas e com as motivações mais variadas.".

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar a operação básica de multiplicação está se tornando um desafio, pois estamos em uma era digital, onde há uma competição para obter a atenção dos alunos. Isso acaba tornando o método convencional de ensino, para os alunos, algo cansativo e pouco atrativo. Tem-se que o conhecimento dessa operação é de extrema importância, pois ela está presente em todos os níveis de ensino da área de matemática.

Buscamos nesta proposta levar uma metodologia diferenciada, mais visual e concreta. O método chinês proporciona a visualização da operação de multiplicação, sem precisar "decorá-la". Nele o aluno consegue compreender a resposta da pergunta "Por que 5x3 = 15?". E ao aplicar a nossa sequência didática, mais precisamente na primeira etapa de aula, notamos o interesse dos alunos pelo método chinês, pois a maioria conseguiu visualizar e compreender a operação.

Notamos que a metodologia empregada foi bem-sucedida, o número de questões resolvidas e a assertividade aumentaram bastante Questionário II, quando comparado ao Questionário I. E com base nos resultados positivos obtidos através do método executado, neste estudo, mostrou-se que uma nova metodologia de ensino pode contribuir significativamente para o ensino aprendizagem dos alunos, bem como ressignificar ou solidificar o conhecimento já retido.

Logo, é interessante que os docentes busquem meios para melhorar o processo de aprendizagem dos educandos, com o auxílio de novas metodologias que fujam do tradicionalismo e despertem a curiosidades e, consequentemente, o interesse nos mesmos. Sendo assim, o método chinês de multiplicação, mostrado neste trabalho, é um excelente caminho que o professor pode seguir para ensinar ou exemplificar os cálculos da operação citada e, consequentemente, melhorar o processo de ensino. Tendo em vista que foi notória tanta a aceitação do método pelos alunos, quanto o conhecimento adquirido por meio dele.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Pacto Nacional pela alfabetização na idade certa**. 2012. Disponível em: <https://www.google.m/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://www.abrapecnet.org.br/enpec/xi-enpec/anais/resumos/R1561-1.pdf&ved=2ahUKEwj PtZmjzOniAhWJF7kGHcZJBvcQFjAKegQIAxAB&usg=AOvVaw0sWwqqQ9WNXca FvZZZ-BHO>. Último acesso em: 12 de jun. 2019.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 23ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática** / Sérgio Lorenzato. 3. Ed. Ver. – Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).

OLIVEIRA, M. M.. **Sequência Didática Interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

OLIVEIRA, S. L. **Tratado de metodologia científica: projetos de pesquisa, TGI, TCC, monografia, dissertação e teses.** 2. ed., quarta reimpressão. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

OLIVEIRA JÚNIOR. M. A. **O uso dos métodos egípcio, babilônico, chinês e russo no ensino da multiplicação de números naturais na escola pública.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – UNIFAP. Macapá, p. 60. 2015.

PAIS, L. C.. **Ensinar e Aprender Matemática/** 2. Ed. – 1. – Reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática /** 3. Ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

ZONZINI, C. S. F. **Algoritmos de multiplicação: uma experiência no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – UNB. Brasília, p.52. 2016.

CAPÍTULO 18

UM ESTUDO SOBRE A APLICAÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 01/12/2020

José Roberto Costa
Docente da Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
Guarapuava – Paraná
http://lattes.cnpq.br/2254880481341921

Marcia Samile Bonfim
Discente da Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
Guarapuava – Paraná
http://lattes.cnpq.br/0077602050438349

RESUMO: Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre as formas diferenciadas de se ensinar os conteúdos matemáticos em sala de aula. Foram tomados como referenciais algumas produções científicas que abordam essa temática. O trabalho de pesquisa foi desenvolvido no período de um ano, com foco para a análise e reflexão sobre textos científicos relacionados ao uso de materiais didáticos, com o objetivo de conhecer e entender melhor as vantagens do uso destes nas aulas de Matemática. Durante a investigação foram lidos textos de vários autores que apresentaram pesquisas e considerações sobre o uso destes recursos, a importância de correlacionar os assuntos abordados durante as aulas habituais e os recursos pedagógicos a serem utilizados. O objetivo foi ampliar os conhecimentos sobre as abordagens da Matemática de forma lúdica, com a utilização de metodologias inovadoras de ensino na Educação Básica. Fazendo isso, se age em prol de um ensino e aprendizagem de Matemática com uma dinâmica diferenciada, "fugindo" do método tradicional que envolve apenas quadro e giz, focando para as dificuldades enfrentadas pelos alunos e motivando-os para aprender mais significativamente os conteúdos matemáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Aprendizagem matemática, Materiais didáticos, Metodologias inovadoras de ensino.

A STUDY ON THE APPLICATION OF TEACHING MATERIALS IN MATH CLASSES IN BASIC EDUCATION

ABSTRACT: This work was developed in order to deepen the knowledge about the different ways of teaching mathematical content in the classroom. Some scientific productions that address this theme were taken as references. The research work was developed over a period of one year, with a focus on the analysis and reflection on scientific texts related to the use of teaching materials, with the aim of knowing and better understanding the advantages of using these in Mathematics classes. During the investigation, were read texts by several authors who presented research and considerations on the use of these resources, the importance of correlating the subjects covered during the usual classes and the pedagogical resources to be used. The objective was to expand knowledge about mathematical approaches in a playful way, using innovative teaching methodologies in Basic Education. In doing so, one acts in favor of

teaching and learning mathematics with a differentiated dynamic, “fleeing” from the traditional method that involves only blackboard and chalk, focusing on the difficulties faced by students and motivating them to learn more significantly the mathematical contents.
KEYWORDS: Mathematical Education, Mathematical learning, Teaching materials, Innovative teaching methodologies.

1 I INTRODUÇÃO

É perceptível o imenso desinteresse por parte dos alunos quando tratamos do processo de ensinar e aprender Matemática. Isso é discutido por estudiosos da Educação Matemática em inúmeras pesquisas realizadas e apresentadas em eventos dessa área. Para muitos, a disciplina se caracteriza como difícil, complicada, chata e maçante para aprender. O principal fator dessa ocorrência tem relação com os métodos tradicionais de ensino adotados pelos professores, sem lugar para trabalhos diferenciados e criativos.

Despertar o interesse dos alunos nas aulas, principalmente nas de Matemática, se constitui em um dos desafios que o professor deve buscar superar perseverantemente. Além disso, é indispensável a criação de estratégias diferenciadas de ensino para tentar garantir uma melhor aprendizagem dos estudantes. Cabe ao professor buscar formas diferenciadas de trabalhar a Matemática, de modo a atrair a atenção do aluno.

A importância de utilizar materiais concretos é salientada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, de Matemática, em que se afirma que os recursos didáticos, como esses materiais, propiciam o estabelecimento, no estudante, do censo crítico para a Matemática. Sobre isso afirma ainda que:

> Os recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadora, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão (BRASIL, 1998, p. 57).

O ensino de Matemática não pode mais se centrar apenas no uso das atividades propostas nos livros didáticos, mas incorporar novos elementos que realcem sua contribuição no desenvolvimento do estudante.

Os materiais didáticos manipuláveis constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa.

Segundo Costa e Pavanello (2013), a utilização de atividades e dinâmicas diferenciadas na sala de aula tende a proporcionar ao aluno e, até mesmo ao professor, uma forma mais atrativa para estudar a Matemática. Com isso, muda-se a visão tanto do professor, com relação às metodologias de ensino, como também a do aluno, principalmente quando este supera suas dificuldades.

Temos consciência que alguns conteúdos da Matemática são mais difíceis de serem assimilados pelos alunos, independentemente de se tratar de um conceito mais complexo, apesar de alguns alunos conseguirem adquirir conhecimento matemático apenas com o uso de quadro e giz e/ou com a utilização do livro didático. O uso de recursos diferenciados de ensino propicia que todos os estudantes se motivem a querer aprender Matemática, isso é o diferencial numa atividade bem elaborada pelo professor.

De acordo com Lorenzato (2006), o professor tem um papel muito importante no sucesso ou fracasso escolar do aluno. Para este autor, não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula.

Portanto, com o uso de metodologias diferenciadas de ensino, se busca chamar a atenção dos discentes, para que estes se interessem em aprender a disciplina e obtenham mais conhecimento, superando os obstáculos que normalmente encontram quando o conteúdo é trabalhado apenas de maneira tradicional. Vale ressaltar que o entusiasmo, a curiosidade e a dedicação trazem muitos benefícios para um bom aprendizado do estudante.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, do tipo metanálise, com a finalidade de investigar e compreender de que forma o uso dos materiais didáticos manipuláveis pode intervir no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, tendo em vista que estes proporcionam aos alunos maior interesse e um maior cuidado por parte do professor durante a preparação e utilização destes materiais.

2 | OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo teve por objetivo investigar resultados de pesquisas recentes sobre a aplicação de materiais didáticos no ensino da Matemática na Educação Básica, além de ampliar o conhecimento dos pesquisadores sobre a utilização desses materiais, haja vista que eles são tidos como uma maneira diferenciada de se abordar conteúdos matemáticos em sala de aula.

A investigação foi feita por meio de estudos e reflexões sobre textos científicos. Estes foram escolhidos por abordarem o tema em questão, ou seja, o uso de materiais didáticos com situações vivenciadas em sala de aula, registradas em pesquisas desenvolvidas e concluídas. Procurou-se verificar se a temática se relacionava com o ensino de Matemática e a aprendizagem do aluno, por meio de formas diferenciadas de ensino, sobre o modo com que os conteúdos são expostos e abordados pelos professores.

O recurso da metanálise, ao ser empregado no material bibliográfico consultado, permitiu o confronto de ideias, produzindo, assim, discussões e reflexões sobre a utilização do material didático manipulável no ensino de Matemática. Essa discussão, da forma como está proposta neste trabalho, tem por objetivo contribuir para difundir a importância

da reflexão sobre a correta utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino de Matemática.

O estudo bibliográfico realizado neste trabalho se caracteriza como o tipo de metanálise descrito por Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 103), como “[...] uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica das mesmas e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos”.

3 | DESENVOLVIMENTO

O trabalho teve início em agosto de 2019 e término em julho de 2020 com uma pesquisa bibliográfica feita para selecionar trabalhos científicos, dentre teses, dissertações, artigos de revistas e de eventos, que se relacionassem à temática em questão. A princípio era feita uma seleção de trabalhos que seriam estudados, ocasião em que era feita a leitura e o fichamento das obras, para que depois fossem discutidos e analisados.

Durante esse período foram realizadas várias análises de textos científicos, tendo em vista o maior destaque de alguns, pois proporcionaram maior criticidade para a pesquisa. A seguir é apresentada uma síntese de cada um dos trabalhos selecionados.

O primeiro texto estudado foi “A utilização de desafios para estimular o raciocínio lógico dos alunos nas aulas de Matemática”, que descreve uma ação desenvolvida com a intenção de superar o modelo tradicional da prática docente empregada nessa disciplina. Esse estudo foi feito com o desenvolvimento do método de Estudo de Caso, em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental. Inicialmente, porém, foi feito um embasamento teórico, evidenciando o importante papel do educador frente à forma de se trabalhar de maneira diferenciada em sala de aula, destacando a importância de utilizar desafios matemáticos. O objetivo principal foi alcançado, haja vista que eles conseguiram perceber como os alunos ficaram motivados e demonstraram grande interesse em aprender a matéria, devido ela ter sido trabalhada de forma diferenciada (DAVIBIDA; COSTA, 2018).

Os resultados relatados se referem a uma intervenção pedagógica desenvolvida no âmbito do Programa de Desenvolvimento Educacional (O PDE é uma política pública de Estado regulamentado pela Lei Complementar nº 130, de 14 de julho de 2010, que estabelece o diálogo entre os professores do Ensino Superior e os da Educação Básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense), com o intuito de gerar contribuição para as práticas docentes, ou seja, incorporar novos instrumentos onde a aprendizagem seja um fator motivador e possibilite o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático. Destaca-se que os alunos eram empenhados e interessados na atividade, o que mostra o estímulo gerado aos alunos ao se fazer uso desse recurso.

Os autores ressaltam que ao se fazer uso de desafios em sala de aula, gera-se a estimulação do raciocínio lógico do aluno. No caso da resolução das charadas, estas eram capazes de desafiar e de motivar, tornando os alunos mais participativos nas aulas, levando-os a compreender os conteúdos abordados. Ademais, os educandos demonstraram atenção nas atividades, evolução no tempo de resolução dos desafios e maior número de acertos em suas resoluções. Dessa forma, ficaram evidentes os aspectos positivos gerados pela atividade e a forma com que isso mudou aquele quadro de desinteresse pela maior parte dos discentes em sala de aula.

Mesmo com o nível de dificuldade sendo mais elevado em algumas das atividades propostas, o que demandou um nível maior de concentração dos alunos nas aulas em que isso ocorreu, cabe salientar que nenhum aluno desistiu de fazer a atividade, o que demonstra o estimulo que o desafio provoca (DAVIBIDA; COSTA, 2018).

O segundo trabalho estudado foi "Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros". Este projeto foi desenvolvido em uma turma de 7º ano, da Escola Estadual Edite Cordeiro Marques, localizada no município de Turvo, no Paraná. O intuito deste trabalho foi analisar as potencialidades de um projeto fazendo uso de jogos como recurso didático no ensino dos números inteiros e suas operações (FILIPIN; COSTA, 2018).

Foi feita a opção pelo uso de jogos para, assim, trabalhar com uma proposta diferenciada, sendo capaz de motivar os alunos a querer obter conhecimentos, mostrando a importância dessa disciplina no nosso dia a dia e o merecimento da aprendizagem dos cálculos matemáticos sem necessidade da oferta das mídias e das tecnologias.

Os resultados obtidos mostram que é possível programar os jogos em sala de aula, considerando principalmente o atendimento aos grupos de alunos, em diferentes momentos e situações. Além disso, possibilita uma melhoria no comportamento dos alunos, haja vista que eles gostam de jogar, respeitando as regras estabelecidas na turma. Alguns alunos que se dispersavam no início das aplicações, logo se envolveram pela atividade e se motivaram, demonstrando interesse em participar.

Foram trabalhados vários jogos: Termômetro Maluco; Números Balls; Memória dos Módulos e Números Opostos, todos trabalhados em grupos. Com essas atividades lúdicas foi possível perceber a relevância de um trabalho lúdico, "fugindo" um pouco dos métodos tradicionais, mostrando a dedicação e interesse por parte dos alunos, que participaram ativamente das atividades. O jogo Termômetro Maluco se destacou muito, pois os alunos criaram até uma nova regra. Com isso, percebemos o desenvolvimento da criatividade, ao mesmo tempo em que eles criavam estratégias de jogo.

Ao final da aplicação dos jogos foi solicitado aos alunos para que registrassem suas opiniões, avaliações e críticas referentes ao projeto que havia sido desenvolvido na turma. Nesses relatos os alunos afirmaram que com os jogos foi possível socializar melhor com

a turma, o que fez com que eles perdessem o medo da Matemática, além de conseguirem aprender mais.

Além disso, eles ressaltaram que além de aprender, é mais divertido aprender brincando. Outros estudantes ainda relataram que com os jogos foi possível descobrir outra forma de aprender Matemática e que ela não é um "bicho de sete cabeças". Fica evidente que o interesse dos alunos é despertado quando o conteúdo é trabalhado com metodologias inovadoras de ensino.

Mais da metade da turma relatou que prefere que a Matemática seja trabalhada de forma lúdica, porém, alguns deles ressaltaram que ainda preferem o método tradicional, ou seja, aula regada a quadro, giz e livro didático. Outra questão evidenciada mostra que a turma julga o aprendizado como melhor quando as atividades são desenvolvidas em grupos, sendo esta a forma mais adequada para ocorrer o aprendizado matemático. A maioria dos alunos destaca que a disciplina é considerada importante para o futuro. Muitos deles deixaram de ver a Matemática como uma disciplina assustadora e disseram que se sentem mais motivados para aprender se o trabalho envolve a ludicidade (FILIPIN; COSTA, 2018).

O terceiro texto analisado foi "Frações e Análise de Erros: uma nova perspectiva para a sala de aula". O trabalho foi aplicado no Colégio Estadual do Campo de Cachoeira, em Candói, no Paraná, sendo desenvolvida com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (ROTH; COSTA, 2018).

Nesse trabalho são apresentados os resultados de uma intervenção pedagógica com o uso do conteúdo de frações e da metodologia da análise de erros. A pesquisa, de cunho qualitativo, buscou contribuir com o processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática.

No decorrer das atividades, a professora motivava e incentivava os alunos, sempre levando em consideração o conhecimento já adquirido por eles. Ela buscou alternativas para levar os alunos a fazerem seus próprios questionamentos acerca de seus erros, para que eles conseguissem analisar os erros cometidos em suas produções ao estudarem o conteúdo de frações.

Como o foco era o estudo e análise dos erros cometidos, esta esteve presente durante todo o processo, na busca de levar o aluno a ser mais ativo em sua aprendizagem, proporcionando-lhe construir seu próprio conhecimento. Durante o processo, foram realizadas algumas avaliações para verificar a evolução dos discentes. Após cada uma delas, vinha o processo da análise dos erros cometidos e, em seguida, outras atividades eram sugeridas e um novo ciclo de verificações se iniciava, onde era possível se fazer a comparação dos resultados obtidos.

Os autores enfatizam que as dificuldades com os conteúdos matemáticos, em particular com as frações, além das notas baixas obtidas nas provas, estão relacionadas à quantidade de erros que os alunos cometem. Infelizmente, nem sempre os alunos são

informados ou orientados sobre o porquê erraram, para então, posteriormente, conseguir superá-los (ROTH; COSTA, 2018).

O quarto texto analisado foi “Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da Matemática e incentivar à pesquisa”, cujo objetivo era fazer uma análise e discutir a situação atual da educação brasileira em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. O trabalho apresenta uma proposta para a redução do fracasso no âmbito educacional da referida disciplina, que vem ocorrendo de forma preocupante na maioria das escolas (NUNES, 2017).

O autor ressalta que o ensino da Matemática vem se desgastando e tornando-se um dos principais motivos de reprovação e evasão na maioria das escolas públicas e particulares da educação brasileira. Esses problemas apontam que os métodos antigos de ensino e aprendizagem necessitam ser readaptados ou até mesmo extinguidos. Deve-se promover um novo modelo de educação, pois utilizar apenas a lousa, giz e exposição oral, já não tem mais trazido bons rendimentos.

Nessa perspectiva, ao utilizar os materiais concretos o aluno terá um contato mais próximo com a Matemática e, com base em Novello *et al* (2009), através dos experimentos, o estudante terá uma noção mais lógica para saber de onde surgem as fórmulas e entender melhor os significados delas. O autor defende o uso metodologias inovadoras no ensino de Matemática, destacando a importância dos materiais didáticos (NUNES, 2017).

Além disso, ressalta que trabalhar com estes materiais pode proporcionar, através de atividades lúdicas, um atrativo para os discentes e um melhor aprendizado dos conteúdos. Com isso, o professor precisa transformar suas aulas tradicionais em aulas dinamizadas, inovadoras e criativas, tornando os experimentos indispensáveis na aplicação desse novo modelo de ensino.

Foi realizada uma intervenção pedagógica nas aulas de Matemática, usando materiais concretos e manipulativos com os alunos. Esse projeto foi desenvolvido buscando melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem das turmas, a partir da percepção do professor com alguns alunos que se encontravam com baixo rendimento e desmotivados com a disciplina.

Esse projeto seguiu algumas etapas lógicas e uma sequência didática, sendo selecionadas as seguintes atividades: Operações com números inteiros utilizando tampas de garrafa pet; Seno, cosseno, tangente e relações métricas nos triângulos utilizando a circunferência unitária, reproduzida em cartolina ou isopor; Prismas e pirâmides: a relação de Euler, utilizando poliedros convexos e côncavos produzidos em folha ofício e cartolina; e, Corpos redondos e poliedros: comparação prática de volumes.

A aplicação dessa metodologia de ensino se mostrou gratificante, segundo o professor, pois, em grande medida, os alunos tiveram a oportunidade de participar mais ativamente das aulas, debatendo os conteúdos, apresentando seus pontos de vista, melhorando seus rendimentos e, consequentemente, adquirindo uma nova visão sobre

a Matemática. Na execução, divergindo das aulas tradicionais, a utilização dos materiais concretos proporcionou ao coordenador do projeto ver a empolgação de vários alunos na busca do conhecimento matemático, o interesse de alguns em saber como trazer para o "concreto" os conteúdos já vistos por eles e, em outros alunos, se percebeu um início de familiarização com a Matemática, mesmo que um pouco tímida, no entanto, significativa (NUNES, 2017).

O quinto trabalho estudado foi "O uso de materiais didáticos no processo de ensino/ aprendizagem". O propósito desse trabalho foi demonstrar a importância da utilização de materiais didáticos como uma importante ferramenta para facilitar a aprendizagem e superar lacunas deixadas pelo ensino.

Com o objetivo de melhorar o rendimento dos alunos e, consequentemente, a aprendizagem, as autoras fomentaram uma capacitação docente, como um recurso indispensável à melhoria da qualidade do ensino, focando no processo de ensino com a utilização de metodologias diferenciadas. Com isso, elas desenvolveram uma atividade inovadora com os alunos, os quais tiveram a oportunidade de participar mais ativamente da atividade (SILVA; VICTER, 2016).

Desta forma, a confecção dos materiais didáticos aconteceu durante a Feira de Matemática, realizada na escola durante a pesquisa, e teve a participação de todos os professores de Matemática da escola e dos alunos. Foram produzidos jogos matemáticos, cartazes sobre a História da Matemática e História da Geometria, desafios, materiais didáticos, atividades lúdicas, vídeos, entre outros.

As turmas foram divididas em grupos e cada grupo ficou responsável de criar e desenvolver um jogo ou um desafio matemático, para que pudessem convidar os colegas a decifrar, testar e brincar. O intuito era estimular a confecção de materiais lúdicos ligados às disciplinas escolares, no caso, a Matemática, além de aproximar os colegas. Esse evento estimulou a curiosidade e a busca por novos conhecimentos.

Segundo as autoras, vale a pena o professor investir nos materiais didáticos como auxílio no ensino da Matemática, pois elas perceberam que o estudante participa mais ativamente de atividades desenvolvidas dessa forma. Os materiais didáticos devem ser manuseados livremente pelos alunos. Sua utilização favorece a aplicação prática dos conceitos matemáticos (SILVA; VICTER, 2016).

O sexto trabalho estudado foi "Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de Matemática: da ação experimental à reflexão". O objetivo dessa pesquisa bibliográfica foi apresentar reflexões sobre a importância da correta utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino de Matemática. A pesquisa, do tipo metanálise, tinha a finalidade de investigar e compreender de que forma o uso dos materiais didáticos manipuláveis pode intervir no processo de ensino e aprendizagem.

O estudo denota serem os materiais didáticos um meio de auxílio nas salas de aulas, sendo assim, de acordo com essa proposta, o professor deve atuar como um mediador na

construção do conhecimento matemático, orientando o aluno sobre as reflexões ocorridas durante a implementação dessa metodologia inovadora de ensino (RODRIGUES; GAZIRE, 2012).

O sétimo trabalho analisado foi "O uso do material concreto no ensino da Matemática". O objetivo dessa investigação foi realizar uma análise acerca da importância do uso do material concreto para o ensino da Matemática e suas contribuições para a aprendizagem dos alunos.

As autoras ressaltam que o trabalho em sala de aula com a utilização do material concreto influencia na aprendizagem dos alunos desde a Educação Infantil até os anos iniciais do Ensino Fundamental, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, coordenação motora, rapidez no pensamento dedutivo, socialização, organização do pensamento, concentração, tão necessária para a compreensão e resolução de problemas matemáticos e do cotidiano, ou seja, proporciona, de forma concreta, conhecimento e, dessa forma, muda a concepção de que a Matemática é uma matéria complicada e muito difícil.

Dessa forma, cabe ao educador perceber a necessidade de enriquecer sua aula com metodologias diferenciadas de ensino, utilizando os materiais concretos para que a aula possa ser mais dinâmica, além de conciliar teoria e prática para instigar os alunos a participarem mais da aula, expor suas opiniões e interagir nos grupos.

As autoras apresentam como exemplo de material didático os blocos lógicos, haja vista que ele proporciona ao aluno adquirir conhecimentos e desenvolver habilidades relacionadas ao processo de classificação. Este material pode ser confeccionado pelos próprios discentes, estimulando-os a participarem da construção do seu conhecimento (SILVA *et al*, 2013).

O oitavo e último trabalho analisado foi "Material Concreto: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental". O trabalho traz reflexões sobre a importância da correta utilização do material concreto no ensino de Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Busca algumas contribuições para a ação didática do professor no que diz respeito à sua aplicabilidade, para que ocorra uma aprendizagem mais significativa dos conceitos matemáticos abordados em sala de aula.

Os autores afirmam que é importante destacar que a utilização do material concreto por si só, não garante aprendizagem, é fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas com o material concreto e com os conceitos matemáticos abordados, para uma posterior abstração e sistematização (SANTOS; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013).

A leitura e reflexão sobre todos esses estudos possibilitaram ampliar a visão dos autores deste texto sobre o ensino da Matemática e a realidade da sala de aula. A maneira como as práticas pedagógicas são conduzidas fazem toda a diferença no que se refere à postura do aluno frente à sala de aula.

Cabe ao educador matemático estar sempre disposto a investir na sua formação continuada e envolvido na busca pela ampliação de seus conhecimentos. Cabe a ele, também, instigar o aluno a querer aprender Matemática, seja com um simples jogo ou com uma atividade diferenciada mais bem elaborada. De todo modo, o que se busca é tentar mudar a visão do estudante, para que este perceba a importância dos conteúdos estudados e queira realmente aprender.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma como a Matemática é abordada em sala de aula interfere na aprendizagem de cada aluno, haja vista que eles são diferentes e aprendem de formas diferentes. Alguns não necessitam de um trabalho feito de forma diferenciada, pois sentem um gosto natural por ela e a aprendem facilmente. Em contrapartida, uma boa parte dos estudantes precisa de uma forma diferenciada de ensino que extrapole a simples utilização de quadro e giz.

Contudo, se o trabalho com a Matemática for desenvolvido com a utilização do lúdico e de forma diferenciada, com metodologias inovadoras de ensino e materiais didáticos diversos, que extrapolam o ensino tradicional, feito com definição, exemplos e inúmeros exercícios, tem-se facilitado o entendimento e a aprendizagem matemática dos alunos, haja vista que isto gera interesse, motivação e apreço por essa disciplina tão importante.

A inserção de novas metodologias no ambiente escolar requer muito preparo por parte dos docentes para que as aulas ministradas possam garantir um melhor aproveitamento dos alunos na sua vida escolar, sendo explorados os devidos conteúdos programáticos relativos à sua série de referência. Já no caso das escolas, estas devem incentivar e colaborar com as práticas metodológicas inovadoras, dando o suporte necessário, seja na compra de materiais lúdicos, como na devida construção e elaboração destes.

Quanto aos materiais didáticos, estes devem promover o contato entre aluno e professor, estabelecendo, assim, uma interação entre ambos e possibilitando um novo entendimento a respeito de conceitos, cuja compreensão ainda é duvidosa para o aluno. Deve ser entendido que os materiais, por si só, não trazem ou produzem o conhecimento para o discente, é preciso que os professores tenham domínio do conteúdo e possam estabelecer a relação do tema abordado na aula expositiva tradicional com a aula onde são utilizados novos métodos didáticos.

Essa condição é pertinente, em virtude do ensino de Matemática demandar o emprego de recursos diferenciados, que possibilitem aos alunos terem uma conduta mais participativa e apresentando um nível significativo de motivação. Com isso, a disciplina passa a ser percebida pela sua capacidade de desafiar os educandos, motivando-os a ter uma postura mais atenta, com o emprego do raciocínio lógico, a fim de se obter as aprendizagens esperadas.

Diante de tudo o que foi discutido, é possível concluir que os materiais didáticos manipuláveis podem intervir positivamente na aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, utilizar os materiais didáticos em sala de aula pressupõe, antes de tudo, por parte do professor, um exercício de prática reflexiva para que este possa utilizá-lo de forma correta, tornando, assim, a aprendizagem dos alunos mais significativa e prazerosa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COSTA, J. R.; PAVANELLO, R. M. **A relevância da Matemática ensinada nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. In: Anais do V ENIEDUC – Encontro Interdisciplinar de Educação. Campo Mourão: UNESPAR, 2013.

DAVIBIDA, J.; COSTA, J. R. A utilização de desafios para estimular o raciocínio lógico dos alunos nas aulas de Matemática. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. 1. ed. Curitiba - PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_josianedavibida.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2020. ISBN 978-85-8015-093-3.

FILIPIN, S.; COSTA, J. R. Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. 1. ed. Curitiba - PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_solenifilipin.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2020. ISBN 978-85-8015-093-3.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NOVELLO, T. P. *et al*. **Material concreto**: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos. In: Anais do IX Congresso Nacional de Educação e III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia. PUCPR. Curitiba: Champagnat, 2009.

NUNES, G. S. **Materiais concretos e manipulativos**: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da Matemática e incentivar à pesquisa. São Paulo: 2017. v. 9. p.1-14. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v09a04-materiais-concretos-e-manipulativos.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2020.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de Matemática**: da ação experimental à reflexão. 2. ed. v. 7. p. 187-196. Florianópolis: 2012. Disponível em: <file:///C:/Users/windows/Downloads/26126-90044-1-PB.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2020.

ROTH, E.; COSTA, J. R. Frações e Análise de Erros: uma nova perspectiva para a sala de aula. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. 1. ed. Curitiba - PR: SEED/PR, 2018. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_elisangelaroth.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2020. ISBN 978-85-8015-093-3.

SANTOS, A. O.; OLIVEIRA, C. R.; OLIVEIRA, G. S. Material Concreto: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos nas séries iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Eletrônica do Curso de Pedagogia do Campus Jataí – UFG.** Uberlândia, v. 1, p. 1-14, 2013. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2020.

SILVA, K. C. N. R.; VICTER, E. F. **O uso de materiais didáticos no processo de ensino/aprendizagem**. São Paulo: 2016. Disponível em: <file:///C:/Users/windows/Desktop/Trabalhos%20para%20fichar/7617_3455_ID.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2020.

SILVA, F. M. *et al*. **O uso do material concreto no ensino da Matemática**. 2013. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/3649>. Acesso em: 28 fev. 2020.

CAPÍTULO 19

AVALIAÇÃO COM MEDIAÇÃO EM RESOLUÇÃO E ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 15/01/2021

Bernadete Verônica Schaeffer Hoffman
Prefeitura Municipal de Vitória - ES
http://lattes.cnpq.br/1907677829564047

Vânia Santos Maria Pereira dos Santos – Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo
Universidade Federal do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/8857182229070463

Trabalho com o mesmo título apresentado,parcialmente,na 8ª Semana de Educação Matemática do Ifes em 2019, aqui ampliado e reestruturado.

RESUMO: Neste texto mostramos um experimento de ensino envolvendo resolução e elaboração de problemas não convencionais ou não rotineiros, no início de 2019, com uma turma de 5º ano. Foi realizado em uma escola de Vitória, como parte de uma avaliação diagnóstica em matemática. A experiência envolveu a resolução e elaboração de três situações com raciocínio complexo, envolvendo operações de adição e subtração (campo aditivo). Tínhamos como objetivos investigar:1) como o aluno se movia no campo aditivo quando a situação exigia leitura e interpretação mais cuidadosa; e 2) que ações do professor eram necessárias junto aos estudantes para a mediação da compreensão do texto e do raciocínio de cálculo numérico. Resultados mostraram que é possível avaliar o conhecimento do estudante em ações alternativas que o motivem para novas descobertas. Ficou evidente a importância da mediação do professor nos processos de leitura para que o estudante compreendesse o texto matemático. Ainda foi possível perceber que estudantes não acostumados a usarem estratégias alternativas passam a usá-las quando auxiliados pelo professor.

PALAVRAS-CHAVE: resolução de problemas, avaliação, mediação, adição, subtração.

ASSESSMENT WITH MEDIATION IN PROBLEM SOLVING AND PROBLEM POSING

ABSTRACT: In this text, we show a teaching experiment involving the resolution and elaboration of unconventional or non-routine problems, in the beginning of 2019, with a class of 5th year. It was carried out at a school in Vitória, as part of a diagnostic assessment in mathematics. The experience involved solving and posing three problem situations with complex reasoning involving addition and subtraction operations (additive field). We aimed to investigate: 1) how the student moved in the additive field when the situation demanded more carefully reading and interpretation; and 2) what teacher's actions were necessary with students to mediate text comprehension and numerical reasoning. Results showed that it is possible to evaluate the student's knowledge in alternative actions that motivate him to new discoveries. It became evident the importance of teacher's mediation in the reading process for the student

to understand the mathematical text. It was also possible to notice that students not used to using alternative strategies start to use them when assisted by the teacher.
KEYWORDS: Problem solving, assessment, mediation, addition, subtraction.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho mostra uma experiência com a resolução e elaboração de situações problema não convencionais, envolvendo operações do campo aditivo (adição e subtração) como parte de uma avaliação diagnóstica com métodos alternativos. Traz também as mediações necessárias para a compreensão de textos matemáticos ou enunciados matemáticos. E apresenta, ainda, reflexões sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo da disciplina que o professor necessita ter para promover abordagens interdisciplinares. A pesquisa de natureza qualitativa foi realizada com uma turma de 26 alunos, de 5º ano do ensino fundamental, em 2019, em uma escola Municipal de Vitória.

O início do ano letivo é sempre um novo desafio para qualquer professor, pois nada é mais importante do que os primeiros momentos de acolhida. As primeiras impressões que os estudantes criarão do professor podem comprometer o ano letivo ou podem ser a garantia de importantes laços de confiança, que acompanharão todo o trabalho que será desenvolvido junto deles ao longo do ano. É preciso avaliar e sondar os conhecimentos que esses estudantes trazem de anos anteriores para traçar um plano de ensino de acordo com as necessidades da turma e especificidades de cada educando, contemplando as diretrizes oficiais do novo ano escolar.

Muitas são as estratégias de que o professor pode lançar mão como, por exemplo, a aplicação de instrumentos avaliativos escritos. Mas nossas pesquisas e experiências relatadas por colegas no Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo [GEEM-ES][1] mostram que vale a pena usar outros instrumentos avaliativos. Temos aprendido como é necessário que professores usem várias formas de avaliar, porque nem sempre um estudante que acerta ou erra questões em uma avaliação está mostrando ao professor o que realmente sabe e o que não sabe de conceitos matemáticos. Por isso, seguimos orientações de Santos (1997), que chama atenção para os processos avaliativos de maneira muito mais ampla, e nos sugere o uso de métodos alternativos de avaliação.

E uma opção para fazer uma diagnose é usar um mapa conceitual, que é uma ‘’organização pictórica dos conceitos, exemplos e conexões percebidos pelos alunos sobre um determinado assunto’’ (SANTOS, 1997, p. 19). A autora informa que mapas conceituais podem ser usados para diagnosticar conhecimentos, para explorar ideias e conceitos, para estudar e para avaliar. Auxilia no processo de ensino-aprendizagem que professores estimulem seus alunos a construírem um mapa conceitual do tipo diagnóstico. Deste

1. GEEM-ES, Grupo de Estudo em Educação Matemática do Espírito Santo congrega professores que estudam a matemática que se ensina na escola básica. Foi criado em 2006, está cadastrado no diretório de grupos do CNPq efunciona até a presente data.

modo, professores podem obter uma imagem mental inicial do que a turma pensa sobre alguns conceitos matemáticos ou sobre a matemática e de como os alunos se relacionam emocionalmente com os termos usados (SANTOS; 1997). Bem aplicado, um mapa conceitual pode trazer "um retrato instantâneo de um aluno num determinado momento, ou seja, a imagem mental que o aluno tem sobre um assunto naquele instante" (SANTOS, 1997, p. 21).

Assim, a experiência que trazemos partiu da primeira sondagem sobre aprendizagem matemática da turma usando um mapa conceitual coletivo do tipo diagnóstico elaborado no quadro, a partir da provocação: o que é matemática para você? A turma foi orientada a colocar palavras que evocassem conteúdo ou conceitos matemáticos e sentimentos envolvidos na disciplina. Este mapa coletivo mostrou-nos que os estudantes tinham maior experiência com o eixo de números e operações. Citaram as operações básicas e nos deram exemplos de situações em que as usariam em resoluções de problemas. Isso revelava também um pouco da metodologia utilizada pelos outros professores que passaram pela vida escolar da turma, pois no mapa apareceu também a palavra *problemas.* Para expressar seus sentimentos, juízos de valores em relação a matemática, usaram palavras evidenciando que consideravam a disciplina algo para pessoas inteligentes. Viam-na como um saber para pessoas que têm coragem, uma área em que precisam pensar e raciocinar, mas que está presente no dia a dia e muito pode ajudar na vida das pessoas. Ao dialogarmos com os estudantes, deixaram transparecer que não desistem e mesmo errando conseguem aprender. Uma aluna ainda usou a metáfora da coruja para realizar uma comparação com a matemática, dizendo que é símbolo da inteligência e que desejava voar como ela nessa disciplina.

Diante dessas impressões iniciais nos perguntamos: como se comportarão esses alunos, que mostraram não ter medo de situações desafiadoras, quando envolvidos em uma situação problema não rotineira? O resultado nos instigou e prosseguimos nos indagando: que mediações do professor são necessárias quando iniciamos um trabalho com alunos não acostumados a usarem estratégias não convencionais? Que conhecimentos pedagógicos e do conteúdo são necessários ao professor para envolver os alunos na resolução de problemas não convencionais? Neste texto relatamos sobre respostas e reflexões que fizemos em 2019 e agora em janeiro de 2021 ao examinar de novo as informações coletadas e registradas deste experimento de ensino. O ponto de partida do experimento foi a construção coletiva do mapa conceitual que comentamos antes. Trazemos depois de apontamentos teóricos e metodológicos os outros momentos desta experiência em sala de aula.

2 | APONTAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Defendemos uma avaliação no processo educativo que toma por base a reflexão antes, durante e depois da ação de um professor ou professora em aula. Assim sendo, quando avaliamos cada estudante em uma turma, nós nos avaliamos também, pois estudantes aprendem ou não a partir dos procedimentos de ensino que usamos em aulas. Portanto, quando refletimos sobre o que um estudante já sabe e o que ainda não sabe, precisamos refletir também sobre o nosso conhecimento do conteúdo e nosso conhecimento pedagógico de conteúdo, como comenta Shulman (1987). Nesta perspectiva, trazemos alguns apontamentos teóricos sobre avaliação, resolução de problemas e sobre as ideias envolvidas nas operações de adição e subtração (campo aditivo). Trazemos também algumas ideias sobre a utilização da oralidade, leitura e escrita em aulas de matemática como facilitadores dos processos de ensino, aprendizagem e avaliação nessa disciplina.

Dialogamos com Santos (1997), que trata da avaliação com visão ampla, em que não se privilegia o processo final e nem se resume o ato avaliativo à aplicação de instrumentos isolados em momentos determinados. A avaliação aqui é defendida como uma sondagem diária, em que o tempo todo o estudante e o professor refletem sobre os seus conhecimentos. Nesse processo, o professor pensa sobre que ações serão necessárias realizar para propiciar que os alunos aprendam e ao mesmo tempo reflete sobre seus conhecimentos e suas próprias estratégias pedagógicas. Logo, uma diagnose não deve acontecer somente antes do processo educativo. Ela é necessária durante todas as etapas do processo para que sempre se vislumbre o que o aprendiz já conquistou, onde tem dificuldades e o que ainda está em construção. Apenas uma diagnose constante e contínua poderá dar pistas ao professor para novos planejamentos que projetem o aluno para além e possam redirecionar o processo de ensino.

Assim, a avaliação de procedimentos de ensino e de aprendizagem dos alunos é muito mais do que um procedimento classificatório do que sabem e não sabem. É um compromisso ético de tentar conhecer nossos estudantes e a nós mesmos para enfrentar fragilidades e desenvolver potencialidades. Nesta perspectiva, Santos (1997) afirma que a avaliação “precisa ser encarada como uma apreciação de uma evolução do desempenho dos alunos e do trabalho pedagógico desenvolvido pelo professor” (p. 12). E nesse *fazer junto,* professor e aluno aprendem simultaneamente a se conhecerem para conquistarem novas aprendizagens.

Santos-Wagner (2008) nos ajuda a compreender o que é um problema em matemática, como se classificam os diferentes problemas, e como trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula, reforçando algumas estratégias comentadas em Santos (1997). De acordo com Santos-Wagner (2008) problemas complexos (ou problemas de cálculos complexos) são aqueles que traduzem situações reais e exigem do educando o uso de mais de uma operação em sua resolução. A autora também versa sobre os

objetivos envolvidos no trabalho com resolução de problemas e em que momento aplicar os diferentes tipos de situações. O que sempre nos motiva é lembrar que

> [...] problema é algo que precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial. Geralmente é uma situação em que a princípio o indivíduo não possui a estratégia para resolvê-lo. Quando o indivíduo já sabe como resolver a situação e já dispõe de estratégias para solucionar a dificuldade, esta deixa de ser problema (SANTOS-WAGNER, 2008, p.56).

Então, se quisermos avaliar como um aluno se move para resolver uma situação problema, ela precisa ser desafiadora na medida certa. Isto é, não pode ser tão fácil a ponto de não envolver esforço intelectual e nem tão complexa de forma que a resolução se torne inalcançável para o aluno naquele momento de sua aprendizagem.

Para a compreensão das ideias envolvidas nas operações de adição e subtração dialogamos com Arrais (2006), Silva (2009) e Hoffman (2012) que basicamente falam em três tipos de raciocínio: raciocínio de composição ou combinação, raciocínio de transformação e raciocínio de comparação. Esses tipos de raciocínios estão associados a ideia de juntar e separar as partes de um todo e compará-las. Envolvem combinação ou composição quando apenas combinamos duas partes para obter uma terceira, separando ou juntando. Exemplo de adição: *O avô de Paulinho caminhou 100 metros em sua caminhada matinal, parou para descansar e depois caminhou mais 80 metros. Quantos metros caminhou até aquele momento?* Exemplo de subtração: *O avô de Paulinho andou 180 metros em sua caminhada matinal, mas parou para descansar depois de alguns metros. Sabendo que depois do descanso andou 80 metros, quantos metros andou antes de parar para descansar?*

Envolvem a transformação quando adicionamos ou subtraímos partes em que acontece uma mudança para mais ou para menos, alterando o estado inicial com a ideia de ganho ou perda, denominadas de transformação positiva ou negativa. Exemplo de adição com transformação positiva: *O avô de Paulinho sairia para caminhar com 100 reais, mas Paulinho lhe deu mais 10 reais. Com quanto dinheiro o avô ficou?* Exemplo de subtração com transformação negativa: *O avô de Paulinho saiu com 110 reais para caminhar, mas perdeu 100 reais. Com quanto dinheiro ficou?*

No raciocínio de comparação, a relação é estática, a criança não apenas junta ou retira partes, ela precisa compará-las. Exemplo: *O avô de Paulinho tem 100 reais; seu neto tem 10 reais. Quanto dinheiro o avô tem a mais? Quanto dinheiro o neto tem a menos?* Ou*: quanto dinheiro o neto precisaria ganhar para ficar com a mesma quantia que o avô possui?* Comparar também é medir, por isso em Silva (2009) e Hoffman (2012) encontramos suporte mais claro para essas situações, com dois tipos de raciocínio: igualização e comparação quantificada. Envolvem ação e comparação entre grandezas iniciais e finais. Isso se percebe na pergunta: *Quanto o neto deveria ganhar para ficar com a mesma quantia que o avô?* Ele pode somar notas de 5, 10, ou 20 até chegar aos 100 reais, quantificando e igualizando as

duas quantias. Essa ideia é utilizada o tempo todo quando feirantes devolvem o troco na hora da compra, ao invés de subtrair somam, complementam, contando a partir do valor da compra até alcançar o valor recebido. Por isso chamamos de ideia de igualização ou complementação.

Arrais (2006) se refere às ideias das operações de adição e subtração como pertencentes a um campo de conceitos denominado campo aditivo, como preconiza Vergnaud (2009/1981). Este toma como ponto de partida que o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio por parte do aprendiz ocorre dentro de três aspectos, a saber, experiência, maturidade e aprendizagem, em que vários conceitos estão interligados. Logo, a aprendizagem dessas operações de adicionar e subtrair em números naturais deve se dar em situações em que o estudante perceba que basicamente são operações inversas em que uma faz e a outra desfaz, juntando, separando ou comparando. Ao oportunizar experiências em que opera com as duas operações em diferentes situações problemas, falando sobre elas, reelaborando-as ou modificando-as por escrito ou oralmente, o aluno gradualmente compreenderá o campo conceitual aditivo.

E para nos ancorar nos processos de comunicação escrita e oral em matemática dialogamos com Hoffman (2012). Nesta pesquisa são apontados os resultados positivos da mediação que a professora realizou na leitura e escrita para a compreensão de conceitos matemáticos e significados dos termos na língua materna. Quanto mais o aluno exercitar a linguagem, comunicando-se com o professor e com os colegas, mais facilmente clareará ideias e conceitos em matemática e em qualquer disciplina. Pois

> [...] a linguagem escrita ou falada é um processo interativo. Assim sendo, precisa ser mediado pelo professor de forma que se criem diálogos entre professor/aluno/texto/interlocutor, significando, na prática da sala de aula, não deixar o aluno sozinho em suas produções, oportunizá-las - a escuta e a fala -, em todas as disciplinas, inclusive a matemática (HOFFMAN, 2012, p. 37).

A autora segue a linha de pensamento de Vygotsky (1993/1987), em que a mediação possibilita a construção de conceitos, pois aquilo que o aluno consegue realizar com a ajuda do professor poderá conseguir realizar sozinho em momentos posteriores. Logo, avaliação diagnóstica não significa deixar o aprendiz sozinho em sua solidão, mas fazer intervenções que o provoquem a pensar e decidir o que fazer. É sobretudo um rico momento de aprendizagens, de conhecimento e de autoconhecimento.

Mostraremos neste texto recortes da experiência com a resolução de um problema complexo e seus desdobramentos em diferentes momentos de três aulas. A primeira aula aconteceu com 18 alunos presentes e as outras com 22 e 24 alunos, todas na segunda semana de março de 2019. Fazíamos imagens fotográficas, registrávamos as aulas em vídeos e nos intervalos anotávamos as nossas impressões. Também apreciávamos os cadernos enquanto circulávamos pela sala, dialogando com os educandos individualmente

ou coletivamente. Em momentos posteriores, conversávamos sobre os dados produzidos com nossos pares e com a coautora deste texto, refletindo sobre a nossa prática. Trazemos como exemplos a atuação de alunos escolhidos aleatoriamente que melhor ilustram a experiência: Mena, Maria, Regina, Nica, Pepeu e Cacá, Juliana e Ama. Lembramos que os nomes são fictícios e que as imagens foram autorizadas pelos responsáveis em reunião realizada no início do ano letivo, quando os convidamos a participar de nossos estudos.

3 | A EXPERIÊNCIA

Iniciamos com um problema não convencional, adaptado do livro de autoria de Imenes, Jakubo e Lelis (1995).

> Seu Antônio fez uma viagem de 200 quilômetros. Andou 120 e parou no restaurante para almoçar. Depois continuou a viagem andando mais 20 quilômetros. Aí, percebeu que tinha esquecido o computador com todos os seus arquivos no restaurante. Para voltar ao restaurante e depois continuar a viagem até o fim, quantos quilômetros andou?

O problema foi escrito no quadro e pedimos que os estudantes o copiassem em seus cadernos, lessem e resolvessem. A primeira aluna a mostrar o caderno com a resposta correta foi Maria, em apenas 5 minutos. Usou as operações de subtração e adição de maneira correta. Pegou os 200 quilômetros da viagem total, subtraiu os 120 quilômetros andados e percebeu que faltavam apenas 80 quilômetros, mas teve que voltar 20 e refazer o percurso, andaria 80 + 20. Mas quando lhe perguntamos como chegou a essa conclusão tão rapidamente, disse simplesmente que achava óbvio. Teria mesmo compreendido a situação? Na imagem abaixo vemos a sua resolução.

Figura 1: Resolução da aluna Maria

Fonte: Registros do professor

Segundo Santos (1997) nem sempre quem erra não sabe e nem sempre quem acerta, sabe. Ao analisarmos o cálculo de Maria, parece que entendeu a pergunta e soube respondê-la. Ela retirou do percurso todo os quilômetros já andados e viu que faltavam 80 km, acrescentou mais os 20 km que Seu Antônio voltou. Usou a ideia de comparação,

pois compara dois conjuntos, os quilômetros andados e o todo. Depois, quando juntou o que teve que andar a mais para voltar e refazer o percurso, usou ideia de combinação ou composição.

Ao olharmos os registros dos outros alunos parece que pegavam números e armavam operações sem compreender o que o problema propunha. Cinco alunos fizeram 120 + 20 + 20 + 80, dando como resposta 240. Argumentavam que precisavam contar duas vezes os 20 quilômetros que Seu Antônio voltou refazendo o percurso, e não entendiam porque dizíamos que ainda não tinham a resposta.

Outros alunos faziam 200 - (120 + 20) = 60 +20 = 80. Argumentavam que estavam somando o que ele andou antes com o que andou depois do almoço, por isso subtraíram 140 de 200, mas precisavam juntar os 20 km que seu Antônio voltou. Eles tinham clareza que precisavam juntar os quilômetros andados no raciocínio de composição, e precisavam diminuir esse total andado do percurso todo, porque já não eram mais 200 quilômetros que faltavam. Mas parece que não compreendiam a ideia de complementação, isto é, quantos km faltavam para chegar ao final do percurso. Na verdade, não entendiam a pergunta que era complexa. Aliás, no primeiro dia dezessete alunos não compreenderam a pergunta sem mediação da professora com vários questionamentos e explicações.

Esses alunos nos mostravam que tinham alguma clareza das ideias matemáticas envolvidas, sabiam que deveriam adicionar quilômetros ou subtrair quilômetros, mas não compreendiam o questionamento da última frase. Pela nossa experiência (HOFFMAN, 2012), observamos que a linguagem utilizada pelo autor do problema foi o que gerou a dificuldade. Havia muita informação, o problema era complexo, pois envolvia mais de uma operação e fugia dos enunciados e das situações-problema, normalmente trazidas pelo professor e pelo livro didático. Além disso, a pergunta era longa e composta de três orações: para voltar ao restaurante/ e depois continuar a viagem até o fim/, quantos quilômetros andou? Era um período composto por coordenação e subordinação. Além disso, não estava na ordem direta que seria: quantos quilômetros andou para voltar ao restaurante e depois completar a viagem até o fim?

Fizemos, então, com os estudantes várias técnicas de leitura para facilitar a compreensão do texto do problema: leitura silenciosa dirigida apontando as frases e leitura dirigida com perguntas, solicitando a reconstrução do texto com as próprias palavras. Quando pedíamos que lessem a pergunta, sempre liam somente o final da frase: quantos quilômetros andou? Por mais que insistíssemos, iniciavam pelo pronome interrogativo quantos. Isso demonstra que devem ter aprendido que em problemas as perguntas sempre iniciam com pronomes interrogativos, tais como quanto, quantos, quanta ou quantas. Voltávamos a insistir em que lessem toda a frase desde o início, mas tinham dificuldades para localizá-la. Então perguntávamos: onde se inicia uma frase em um texto, onde é que termina uma frase para iniciar outra no meio do texto? Veja o leitor como é importante que se auxilie o aluno na leitura de um texto matemático. E como é necessário e importante

que o professor saiba fazer mediações, tendo conhecimento matemático, conhecimento pedagógico matemático e conhecimento de linguagem materna. Foi a partir das mediações quando finalmente Juliana localizou a frase toda: para voltar ao restaurante, buscar o computador e ir até o fim, quantos quilômetros andou?

Pedimos a todos que grifassem a frase no final do problema. Ama, de imediato, notou que não precisaria somar todo o percurso, bastava somar os 20 quilômetros que Antônio voltara mais o que faltava para completar a viagem. Expressou-se assim para um pequeno grupo: “quando ele volta, ele anda 20 quilômetros e aí precisa ver quanto falta pra [para] chegar”. Foi uma das poucas alunas até aquele momento que compreendeu a pergunta e relacionou a ideia de complementar e combinar no campo aditivo. Com a sua explicação mais três alunos acertaram. Veja o leitor, como é importante também que as interações aconteçam entre os alunos.

A aluna Mena desenhou uma reta numerada seguindo a nossa orientação de enumerá-la de 20 em 20. A reta representaria o percurso de 200 quilômetros. Quando lhe sugerimos que usasse uma seta para marcar o trajeto que responderia à pergunta, compreendeu e somou o retorno com o trajeto que faltava: 20 + 20 + 20 + 20 + 20, visualizado na reta. Foi muito interessante sua vibração: “Agora eu entendi! É muito fácil!” Realmente, nesse raciocínio o aluno localiza o ponto em que seu Antônio está quando percebe que esqueceu o computador e conta os quilômetros de 20 em 20 que devem ser percorridos para voltar e finalizar a viagem. Emprega apenas uma operação do campo aditivo usando a ideia de combinação (Figura 2).
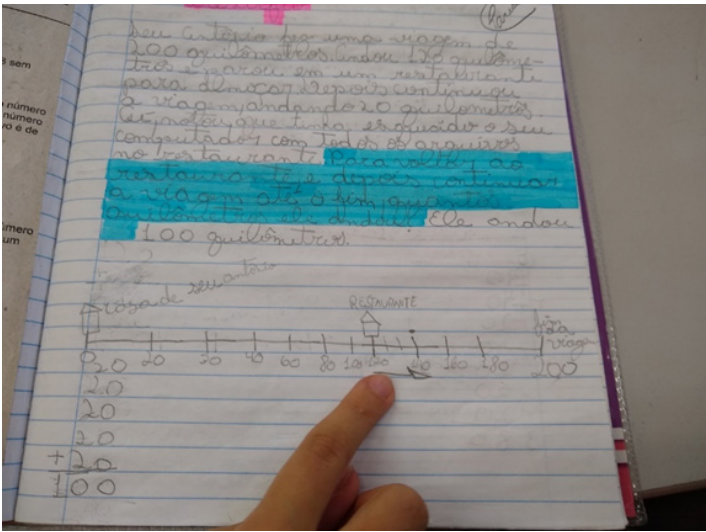
Figura 2: Resolução da aluna Mena - uso da reta numerada

Fonte: Imagens produzidas pelo professor pesquisador

Assim, notamos que alguns alunos tinham certa resistência em utilizar o desenho em matemática e ainda insistiam, a partir de suas crenças, que o resultado deveria sair de um cálculo numérico. Então pedimos que Ama e Pepeu mostrassem no quadro como poderiam chegar à solução usando a operação convencional ou a reta numerada, como mostra a Figura 3. Aqui no desenho, localizando o ponto em que seu Antônio volta e depois segue até o fim, fica ainda mais claro que poderiam apenas somar. Essa clareza também foi alcançada pela dupla depois da explicação de Ama.
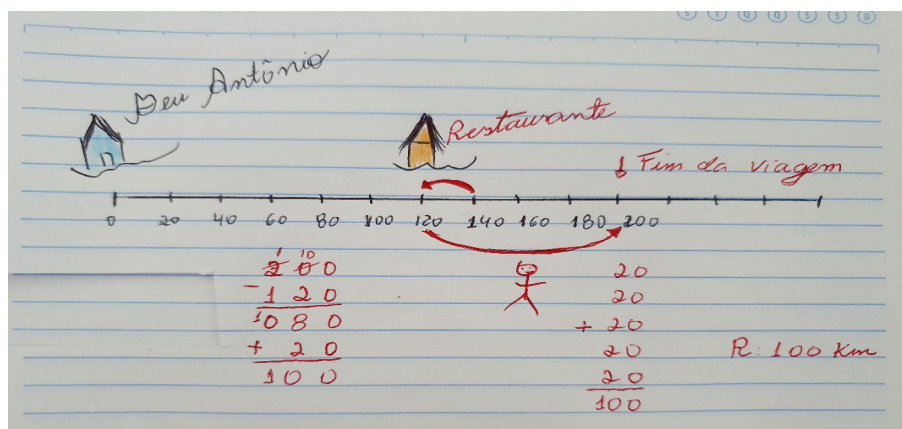
Figura 3: Resolução da dupla Pepeu e Ama compartilhadas com a turma

Fonte: Imagem registrada pelo pesquisador

3.1 Reflexões sobre o primeiro dia do experimento de ensino

No primeiro dia, somente um aluno resolveu o problema sem mediação e somente seis alcançaram a resposta com ajuda da reta numerada. Onze alunos precisaram de muita ajuda individualizada para que compreendessem a pergunta e o trajeto representado na reta. Mas será que, após a mediação, realmente compreenderam? Pedimos, então, que formulassem uma situação problema com as mesmas ideias em outro contexto e que usassem outros números. Somente os mesmos seis alunos que resolveram o problema original, antes da demonstração no quadro, conseguiram criar outra situação.

Ficamos intrigados e fizemo-nos muitos questionamentos: Não era um bom problema? Será que os alunos não estavam acostumados a usarem diferentes estratégias de resolução? Será que as situações problema que foram oferecidas anteriormente a esses alunos seguiam sempre o modelo tradicional, com linguagem direta, em sua forma prototípica, como aparecem na maioria dos livros didáticos? Será que resolveriam uma situação semelhante usando conhecimentos vivenciados na experiência descrita neste texto? Será que os outros alunos saberiam elaborar problemas similares e tinham

experiência com este tipo de tarefa ou os provocamos pela primeira vez? Será que os alunos não possuíam maturidade linguística para compreender a pergunta elaborada com três orações na ordem indireta? Estes questionamentos nos auxiliaram a pensar em estratégias para implementar, no segundo momento de aulas, novas experiências com os problemas elaborados por alguns. Tivemos que pensar e refletir sobre as estratégias de aula e sobre como motivar e envolver os outros alunos para compreenderem os problemas elaborados por seus colegas. Ademais, desejávamos ajudar a todos os alunos da turma a fim de conseguirem elaborar outros problemas similares. Olhamos e interpretamos inicialmente estas informações produzidas no experimento de ensino em 2019. Agora, em janeiro de 2021, estamos examinando as mesmas informações para podermos refletir e analisar de forma mais profunda as mesmas.

3.2 Segundo momento do experimento de ensino

Resolvemos levar ao quadro dois dos problemas elaborados por alguns estudantes em dias alternados. Segue um dos primeiros problemas elaborados, transcrito na íntegra:

> Leone estava no trabalho e tava [estava] andando para ir a casa e andou 140 km quando parou e percebeu que tinha esquecido seu celular com todos os compromissos que tinha hoje, então precisava voltar ao seu trabalho, 140 km. Sua casa ficava a 240 km do trabalho. Para voltar ao trabalho e continuar o percurso até em casa, quantos quilômetros ele andou? (Problema elaborado por Mena em março de 2019.)

O problema elaborado possui as mesmas ideias do problema de seu Antônio. Aqui, neste problema similar ao elaborado pelo aluno, ao perceber o esquecimento, Leone volta ao ponto de partida e depois segue a viagem até chegar em casa. A falta de pontuação e estrutura frasal do texto pode ter dificultado a compreensão dos alunos presentes neste dia de aula para além da complexidade da pergunta. E de novo, poucos alunos entenderam e resolveram corretamente a situação. Somente oito estudantes o resolveram sem que precisássemos fazer alguma mediação na leitura. Dentre eles, seis alunos valeram-se da reta numerada ou esquemas desenhados. De toda forma, era um progresso, apesar da situação parecer irreal. Andando como? E que trabalho era esse que distava 240 quilômetros de casa? Ricas discussões foram realizadas para que o problema se tornasse mais significativo e próximo da realidade. Uma aluna disse que seu tio é professor e trabalha em uma faculdade que fica no Norte do Espírito Santo, bem longe, e, portanto, era uma situação possível. E a autora explicou que andar para ela significa “andar de carro”.
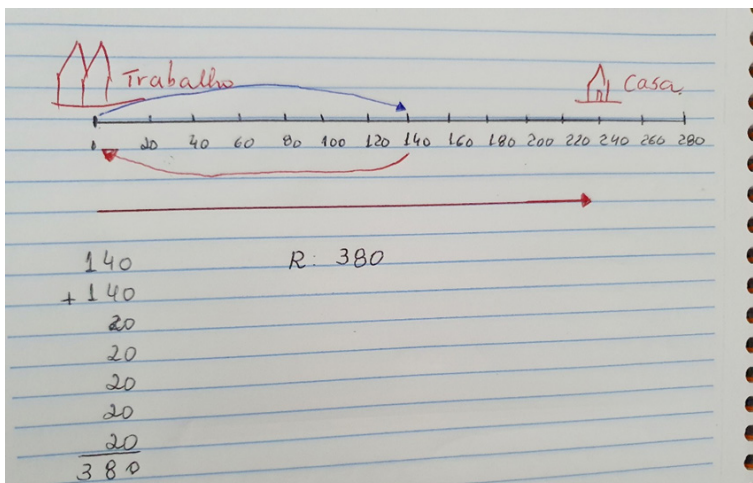
Figura 4: Resoluçãoda aluna Mena

Fonte: Registro do professor pesquisador

A autora do problema, Mena (Figura 4), enumerou a reta de 20 em 20, soma 140 + 140 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 e explicou: “eu peguei 140 + 140 porque isso ele andou indo e voltando, depois vi os pedaços que faltavam para ele chegar em casa e somei”. É muito interessante ver como essa estudante observou a ideia da complementação concretamente na reta. Ao somar os seis segmentos de 20 que faltavam com o percurso da volta, mais o percurso até onde estava, moveu-se com muita destreza no campo aditivo usando apenas uma operação no raciocínio de composição ou combinação.

Já a aluna Regina juntou os trajetos 140 + 140 = 280 e explicou-nos que se tratava da ida até o ponto em que observou que esqueceu o celular e a volta para buscá-lo. Nessa explicação notamos que essa aluna ainda só enxergou a última frase da pergunta, pois parece que procurou o total, mas depois, ao invés de juntar os 100 km que ainda deveria andar para completar o percurso até em casa, subtraiu os 240 de 280. Ao lhe perguntarmos por que o fez, não soube nos explicar. Talvez sabia que havia uma subtração envolvida, pois quando chegaria ao ponto em que estava ao lembrar do celular, não precisava mais andar 240 km, agora já faltava menos. Mas não compreendeu como relacionar isso no cálculo numérico, por isso fez 280 – 240 = 40. Essa ideia do “quanto falta” para chegar a um valor dado, que é a ideia de complementação no campo aditivo era uma das coisas que mais oferecia dificuldades de compreensão para outros alunos também.

Para nossa surpresa até a aluna Maria, a primeira a resolver o problema original, agora trazia um outro raciocínio. Multiplicou 2 x 140 = 280, mas adicionou 240, sem perceber que ao chegar ao ponto em que voltou não andaria mais 240, pois nesse ponto só faltavam 100. Repetimos as mesmas técnicas de leitura do texto com levantamento das

informações relevantes e insistimos na pergunta. Com a nossa interação, rapidamente ela concluiu a resposta e explicou que se equivocara por pensar no total. Fizemos vários diálogos individualmente e coletivamente com outros estudantes, assim dezessete alunos resolveram o problema. Mas ainda tínhamos nove alunos que admitiram não ter compreendido, mesmo depois que fomos ao quadro explicar com contraexemplo (Figura 5). Na figura, dois alunos apresentaram a solução, uma correta e outra incorreta. A seta vermelha mostra a solução de acordo com a pergunta: voltou 140 e adicionou 240, pois Leone recomeça o trajeto, perfazendo 380 km. No canto, somou 140 + 140 + 240 = 520, sem perceber que os 140 já estão inseridos nos 240, quando a personagem refaz o percurso.
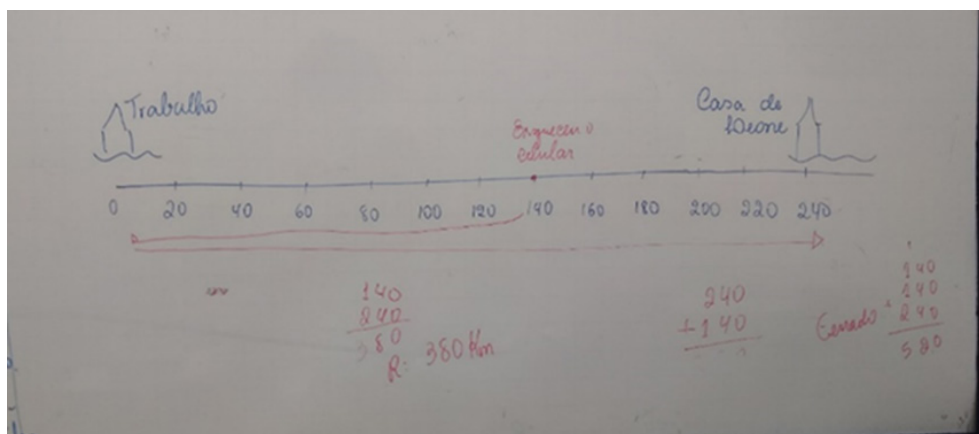
Figura 5: Explicação com contraexemplo

Fonte: Registros feitos pelo pesquisador

3.3 Terceiro momento do experimento de ensino

Uma semana depois, para não cansar a turma, digitamos a situação elaborada por Maria e entregamos para que colassem em seus cadernos e não tivessem o trabalho de copiá-la. Dissemos que era mais uma situação criada pelos colegas como desdobramento do primeiro problema que resolveram. O aproveitamento e valorização do texto elaborado pelo aluno por si só já funcionou como um estímulo. Havia vinte e dois alunos presentes neste dia de aula.

> Sarah Red Crystal vai à festa de Mari Mármore, que fica a 250 km de sua casa. O pai de Sarah parou para reabastecer o carro depois de andar 130 km e Sarah aproveitou para pegar um lanche. Depois de andar mais 30 km, eles perceberam que esqueceram o presente no posto. Para voltar até o posto e depois continuar a viagem até o final, quantos km eles terão de andar? (Elaboração da aluna Maria transcrita na íntegra).

A situação é idêntica e a pergunta é análoga. Não tivemos dúvidas até então, que realmente compreendera a situação e o cálculo relacional que determinaria o cálculo numérico. Para nós essa aluna leu, compreendeu o que leu e começou a clarear as ideias de comparação, complementação e composição do campo aditivo. Segundo Santos (1997), quando o aluno é capaz de recriar a situação com outras palavras é porque a compreendeu. Como vimos acima, errara na resolução do problema de Leone por falta de atenção na pergunta. O dificultador não estava na compreensão das ideias matemáticas, mas na compreensão do texto e da leitura.
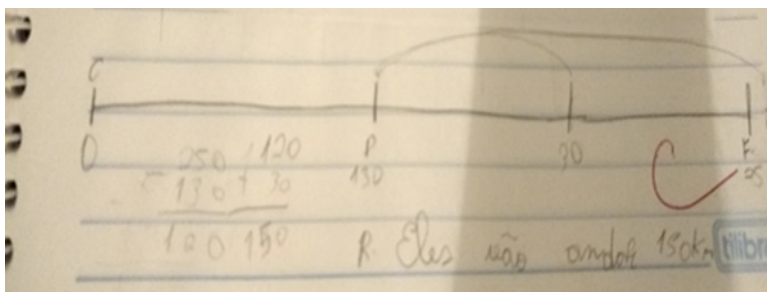
Figura 6: Solução do aluno Cacá, sem mediação

Fonte: Registros em aula

Desta vez dez alunos conseguiram resolver sem que houvesse mediação. Dentre eles, oito alunos usaram a reta numerada ou desenharam esquemas. Já começavam a arriscar mais e sair da prática de apenas fazer operações numéricas com algoritmos formais. Na Figura 6 vemos a solução individual de Cacá: o aluno mostrou com a seta o retorno ao posto e adicionou 30 aos 120 quilômetros que faltavam, dando como resposta 150 quilômetros. Numericamente fez 150 – 130 = 120, depois adicionou os 30 km que voltou, 120 + 30 =150.

Segundo Gómez Chacón (2003), a maneira como o aluno se relaciona com essa disciplina nos anos iniciais pode ser decisiva para a maneira como virá a lidar com ela em sua vida escolar e profissional futura. Isso acontece porque influirá em suas crenças e concepções sobre si mesmo e sobre a disciplina, interferindo no seu autoconceito e definindo escolhas profissionais. Por isso, resolvemos brincar mais com a situação e dramatizá-la como é sugerido por Santos (1997) e Santos-Wagner (2008).

Marcamos pontos em que a situação se passa, em uma linha reta que ia de um canto a outro da sala: casa de Sarah, posto de gasolina, local em que se dão conta que esqueceram o presente e local da festa. E fizemos vários alunos dramatizarem a situação: a ida até o posto, a parada com o esquecimento, o trajeto até a lembrança, a volta e a retomada do percurso. Foi uma festa. Inventaram motivos para a volta e outras situações:

não havia lojas, o presente era valioso, o pai brigando com a filha que não tinha nada que tirar o presente do carro e outros argumentos surgiram. Nessa brincadeira, descontraíram e perceberam melhor a ideia do “quanto falta” para completar a viagem. Entenderam na vivência porque faziam a subtração. E depois, novamente alunos foram ao quadro para sistematizarem o raciocínio (Figura 7).

Figura 7: Dramatização - pai briga com a filha que esqueceu o presente - e sistematização

Fonte: Imagens produzidas pelo pesquisador

Um recurso que utilizamos foi reescrever com eles a pergunta na ordem direta como mostra a Figura 7, iniciando-a com o pronome interrogativo: quantos km eles terão de andar para voltar até o posto e depois continuar a viagem até o final? E constatamos que aos poucos a situação se tornava mais clara. Desta vez, somente seis alunos ainda disseram que estavam confusos. Nos dias que se seguiram levamos outras situações com números menores e gradativamente percebíamos que mais alunos acertavam.

4 | CONCLUSÃO

Usamos um problema envolvendo raciocínio complexo em uma turma que ainda não conhecíamos. O resultado poderia ter sido desastroso se não fizéssemos as mediações acima descritas. Acreditamos que qualquer situação matemática envolvendo as operações básicas pode ser desenvolvida com os estudantes, mesmo com certa imaturidade, desde que não os deixemos a sós. Até porque um problema só é um problema enquanto o aluno não possui ainda clareza sobre a estratégia que irá usar para resolvê-lo, quando já a possui, passa a ser um exercício de aplicação (SANTOS-WAGNER, 2008). Então sob essa ótica consideramos a experiência muito válida. Não atingimos, ainda, todos os alunos, mas sabíamos que conseguiríamos isso com outras resoluções de problemas e elaborações de problemas pelos alunos ao longo do ano de 2019.

Nas situações de comparação é muito importante que se varie a forma de perguntar em situações simples. Ex.: Paulo andou 20 quilômetros e José andou 30 quilômetros. Quantos quilômetros José andou a mais? Quantos quilômetros Paulo precisa andar para ter percorrido a mesma distância que José? Quantos quilômetros Paulo andou a menos que José? Quanto mais o professor variar as perguntas, menos os alunos ficarão presos às palavras-chave (a mais ou a menos) que podem lhes indicar o tipo de operação que deverá realizar. Também consideramos importante que, de vez em quando, as perguntas da situação problema ocorram em outros locais e de forma indireta como a pergunta que foi trabalhada neste experimento de ensino em alguns momentos. Ou seja, é necessário que os alunos vivenciem trabalhos com problemas em que também se façam presentes perguntas indiretas e colocadas de outra maneira no texto para que o estudante não fique condicionado apenas às perguntas diretas. As situações problema oferecem grandes oportunidades para professores e professoras trabalharem com a língua materna juntamente com o raciocínio matemático.

Logo, o professor precisa conhecer as ideias envolvidas nas operações básicas, e saber como lidar com esse conhecimento para que se torne acessível aos seus alunos e para que, de fato, aprendam as ideias de adicionar e subtrair. Ou seja, o professor precisa ter esse conhecimento matemático sobre as operações e ter conhecimento pedagógico matemático de como ensinar as mesmas aos seus alunos (SHULMAN, 1987). São as mediações conscientes, planejadas, modificadas e repensadas que um professor fizer, dialogando e permitindo a interação entre os estudantes que vão tornar uma situação matemática prazerosa ou não, auxiliando-os a compreender o que precisam realizar. As estratégias alternativas devem ser exploradas e incentivadas pelos professores em aulas de matemática sem cobranças imediatas de uso de algoritmo formal. Mas isso requer conhecimento matemático e conhecimento pedagógico matemático do professor e habilidades pedagógicas para colocar esses conhecimentos em prática em aulas. Os alunos mostraram resistência e certo estranhamento ao usar estratégias diferentes para ler, reler, compreender e resolver problemas, usando o desenho, a reta numerada ou a dramatização. Entretanto, observamos ao final de três momentos deste experimento de ensino, que já estavam mais familiarizados com outras estratégias e felizes com seus resultados. Não se pode esperar que alunos que venham de práticas menos dialógicas em matemática, de quatro anos escolares anteriores, mostrem os mesmos resultados de imediato, que alunos que tivessem trabalhado assim, anteriormente, já habituados ao uso de outras estratégias para resolver e compreender problemas.

Ao final da resolução do terceiro problema, em roda de conversa, avaliamos junto com os estudantes as estratégias que foram utilizadas. Foi muito bom ver que quase toda a turma concordou que realizavam a leitura rápido demais. Quanto aos desenhos, dez alunos disseram que isso lhes ajudou e que pretendem usar novamente. Sobre a dramatização, todos disseram que amaram e gostariam de fazer novamente. Ama explicou que a

dramatização não trouxe a solução, mas ajudou a clarear os procedimentos numéricos que deveriam ser realizados. Concluímos que não devemos desistir se não conseguirmos, ainda, envolver todos no mesmo momento. Outras vivências devem se seguir para que conceitos clareiem. O bom ensino é aquele que projeta para etapas adiante daquilo que o aluno já é capaz de realizar.

REFERÊNCIAS

ARRAIS, U. B. **Expressões aritméticas:** crenças, concepções e competências no entendimento dos professores polivalentes. PUC/ SP, 2006, 178f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional:** os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

HOFFMAN, B. V. S. **O uso de diferentes formas de comunicação em aulas de matemática no ensino fundamental**. 2012. 290f. Dissertação (Mestrado em educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

IMENES, L. M. P. JAKUBOVIC, J. LELIS, M. C. **Matemática ao vivo**. 3. ed. São Paulo: Scipione, 1995. (Programa Nacional do Livro Didático).

SANTOS, V. M. P. (Coord.) **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:** métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, no 53, p. 43-74, jul./dez. 2008.

SHULMAN, L. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harward Educational Review**, v. 57, p. 1-22, 1987.

SILVA, S. A. F da. **Aprendizagens de professoras num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais**. 2009. 364f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

VERGNAUD, Gerard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; revisão de Maria Teresa Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009. (Originalmente publicado em 1981, sob o título: L`enfant, la mathématique e la réalité).

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem.** Tradução de Jeferson Luiz Camargo. Revisão técnica José Cipola Neto. São Paulo: Martins Fontes, 1993. (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1987).

CAPÍTULO 20

A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DE JOGOS

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 12/01/2021

Luzia da Costa Tonon Martarelli
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
http://lattes.cnpq.br/2170224269934506

Brendow Pena de Mattos Souto
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ
http://lattes.cnpq.br/5386903704199525

RESUMO: Dentre os diversos recursos disponíveis para que o professor de matemática atue com seus alunos, o uso de jogos como estratégia pedagógica não costuma ser explorado. Desejamos mostrar como os jogos podem ocupar um lugar central como estratégia pedagógica no ensino de matemática. Para isso, será apresentado o Jogo da Senha, que através do questionário do aluno, trabalha a construção do conhecimento de análise combinatória. Esta atividade faz parte do curso Jogos & Matemática que é oferecido como projeto de extensão da UNIRIO.
PALAVRAS-CHAVE: Jogos de matemática, Ensino de matemática, Prática docente.

THE CONSTRUCTION OF KNOWLEDGE OF COMBINATORY ANALYSIS THROUGH GAMES

ABSTRACT: Among the various resources available for the math teacher to work with his students, the use of games as a pedagogical strategy is not usually explored. We want to show how games can occupy a central place as a pedagogical strategy in the teaching of mathematics. For this, the Password Game will be presented, which, through the student's questionnaire, works to build the knowledge of combinatorial analysis. This activity is part of the Games & Mathematics course that is offered as an extension project at UNIRIO.
KEYWORDS: Math games, Mathematics teaching, Teaching practice.

1 I INTRODUÇÃO

Análise combinatória é um dos conteúdos que não costuma ser abordado na educação básica. Dentre os motivos alegados para isso, se destacam a dificuldade na interpretação de problemas, a falta de uma preparação para o raciocínio combinatório no Ensino Fundamental – quando comumente a análise combinatória é um conteúdo do Ensino Médio – a variedade de possíveis heurísticas na resolução dos problemas, a dificuldade em estimar se um resultado é correto ou não e, não menos importante, falhas na formação dos professores que ensinam matemática.

Segundo Pessoa e Borba (2009), mesmo crianças no Ensino Fundamental I (do primeiro ao quinto ano de escolaridade) podem realizar atividades de análise combinatória e resolver problemas, com base em suas próprias estratégias de cálculo. Para essas autoras, o desenvolvimento conceitual do raciocínio combinatório "é um modo especial de pensamento lógico-dedutivo e, em uso pleno, denota um mais alto nível de desenvolvimento cognitivo" (BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013, p. 2).

A parte principal da análise combinatória é estudar maneiras de contar o número de elementos de um determinado conjunto finito sem precisar enumerar cada caso. Isso é necessário porque muitos conjuntos que aparecem nos problemas são grandes, o que seria inviável enumerar cada caso, gastaria muito tempo com enormes chances de erros, por exemplo, contar um determinado elemento mais de uma vez. E a base para isso é o princípio da multiplicação juntamente com o princípio da adição. O livro texto "Análise Combinatória e Probabilidade" nos foi de grande auxílio porque traz o ensino de análise combinatória através de problemas iniciais e a partir destes os conteúdos vão sendo construídos (MORGADO et al., 2006).

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais a base para o que acreditamos:

> A contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 1999, p. 54).

Mais recentemente, com a Base Nacional Comum Curricular, tem se valorizado o ensino de contagem desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, propondo sua integração ao currículo com habilidades e competências adequadas a cada fase do ensino.

> Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica (BRASIL, 2019, p. 275).

Entre os recursos didáticos citados nos Parâmetros Curriculares Nacionais destacam-se os ''jogos''.

> Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (BRASIL,1997, p. 36).

Iremos apresentar o Jogo da Senha como meio para que cada professor/aluno construa a sua própria saída para a resolução de um determinado problema. Através dele poderemos trabalhar o princípio fundamental da contagem, mais especificamente a permutação simples.

Essa prática pedagógica se iniciou durante um curso de extensão Jogos & Matemática, que é oferecido desde 2017 na UNIRIO, produto de quatro projetos de extensão da UNIRIO, como formação continuada de professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio em redes públicas ou privadas do Rio de Janeiro.

Durante o curso, observamos que por meio dessa abordagem o professor conhece meios de dinamizar a aula e possibilitar a aprendizagem dos conteúdos relacionados a análise combinatória de forma que o aluno construa o seu conhecimento.

Os principais objetivos são: 1) Apresentar uma proposta de atividade com jogos matemáticos que tratem de elementos relacionados a análise combinatória; 2) Despertar a curiosidade e o interesse dos professores que ensinam matemática para a criação de novas práticas docentes e aplicação das mesmas em sala de aula; 3) Apresentar jogos para o ensino de contagem (análise combinatória) e verificar por meio desta abordagem que não é necessário o uso de fórmulas prontas; 4) Estimular os professores a introduzir os conteúdos curriculares utilizando problemas do dia a dia e jogos; 5) Estreitar a relação e, consequentemente, a troca de experiências entre professores e alunos;

2 | DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Jogo da Senha:

Os materiais utilizados são lápis coloridos e papel.

Regras do jogo:

Número de jogadores: 2.

É sorteado o jogador 1, que será o primeiro a escolher a senha, composta por quatro cores distintas dentre as seis disponíveis. O jogador 2 tentará descobrir a senha. O jogador 2 deverá escolher uma senha aleatória de quatro cores e colocá-la na coluna das alternativas do tabuleiro. O jogador 1 irá analisá-la sobre as seguintes regras:

- Seguirá a ordem das bolinhas da esquerda para a direita na coluna da análise;
- Se a primeira cor escolhida pelo jogador 1 estiver correta e na posição correta, ele preencherá completamente a mesma;
- Se a cor escolhida da correspondente bolinha estiver correta mas na posição errada, ele marcará um X na mesma;
- Se nenhuma das alternativas anteriores acontecer, ele a deixará em branco;

1. Caso o jogador 2 não acerte a senha, ele terá no máximo 8 tentativas. Em seguida, os jogadores trocam de posição e o jogo se reinicia.

2. Ganhará o jogador que descobrir a senha com o menor número de tentativas. Para praticar esse jogo são distribuídos tabuleiros com espaços para 9 tentativas e suas respectivas análises.

Figura 1 – Modelo do tabuleiro

Fonte: os autores

Figura 2 – Modelo do minitabuleiro

Fonte: os autores

O foco não será o jogo, mas será o desenvolver do conteúdo permutação simples e permutação caótica. O jogo é uma estratégia pedagógica.

3 | METODOLOGIA

Primeiramente, dividiremos os participantes em duplas, escolhidas aleatoriamente entre eles, e depois apresentaremos o jogo e deixaremos que joguem várias partidas. Sempre anotando a quantidade de tentativas necessárias para descobrir a senha. Depois de se familiarizarem com o jogo, apresentaremos alguns problemas, que foram elaborados a partir do jogo e envolvem contagem (análise combinatória). No final da atividade, anotaremos a resposta de cada dupla. Se as respostas diferentes, ou o desenvolver da questão for, convidaremos cada dupla para expor o raciocínio que usaram para resolver. Dessa maneira, podemos observar diferentes maneiras de pensar em um determinado problema, quando a resposta estiver correta. E, se a resposta estiver errônea, será uma oportunidade dos participantes treinarem a identificar onde está o erro do aluno, e a partir daí, completar ou explicar como poderia ser resolvido. Essa troca de experiências é muito importante para o aprendizado e também para que o professor se sinta seguro para ministrar aulas sobre esse conteúdo, já que é uma situação que pode ser realmente vivenciada por ele.

Problema 1	Quantas cores, no mínimo, você pode acertar na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não?
Problema 2	Depois de qual tentativa você consegue descobrir todas as cores da senha?
Problema 3	Quantas senhas são possíveis?
Problema 4	Sabendo que a primeira análise foi: Qual o número de senhas possíveis para a segunda rodada?

Quadro 1 – Problemas que serão trabalhados

Fonte: os autores

A seguir, apresentaremos uma outra abordagem para o problema 4, ou melhor, uma maneira de se obter o resultado deste, através da teoria de conjuntos e permutação simples.

4 I UMA OUTRA ABORDAGEM DO PROBLEMA 4

Como a análise foi:

Significa que já sabemos quais são as 4 cores, mas ainda não sabemos onde se localizam. Para facilitar o desenvolvimento, suponha que estas cores sejam azul, vermelho, amarelo e preto.

Defina os seguintes conjuntos:

A= {todas as senhas possíveis com 4 cores distintas (azul, vermelho, amarelo e preto}

A1= {todas as senhas de 4 cores distintas nas quais o azul está na primeira casa}

A2= {todas as senhas de 4 cores distintas nas quais o amarelo está na segunda casa}

A3= {todas as senhas de 4 cores distintas nas quais o vermelho está na terceira casa}

A4= {todas as senhas de 4 cores distintas nas quais o preto está na quarta casa}

Considerando os conjuntos A1, A2, A3 e A4:

a) Há interseções dois a dois?

b) Há interseções três a três?

c) Há interseções quatro a quarto?
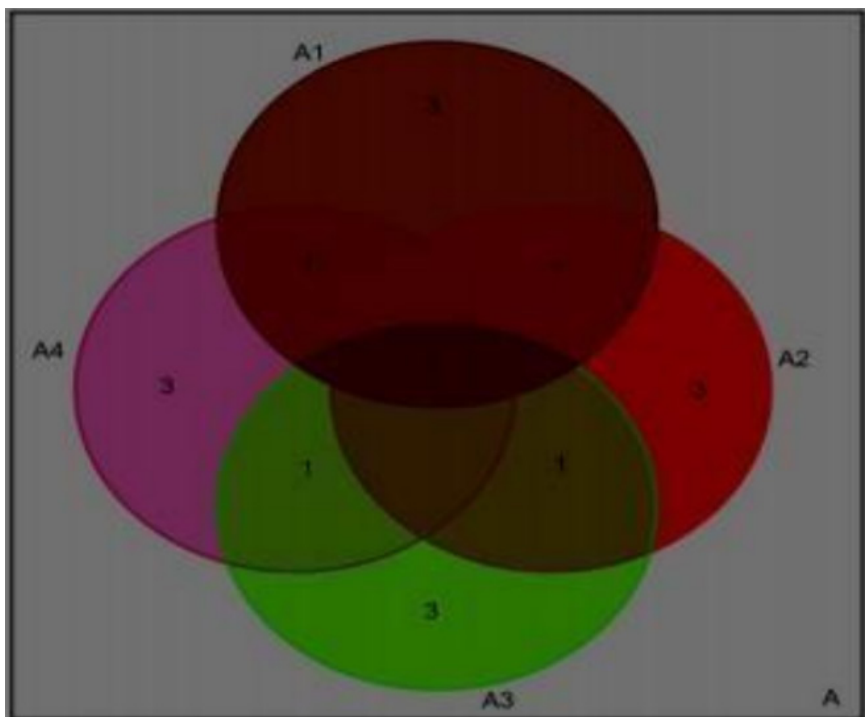
Figura 3 – Representando graficamente pelo diagrama de Venn

Fonte: os autores
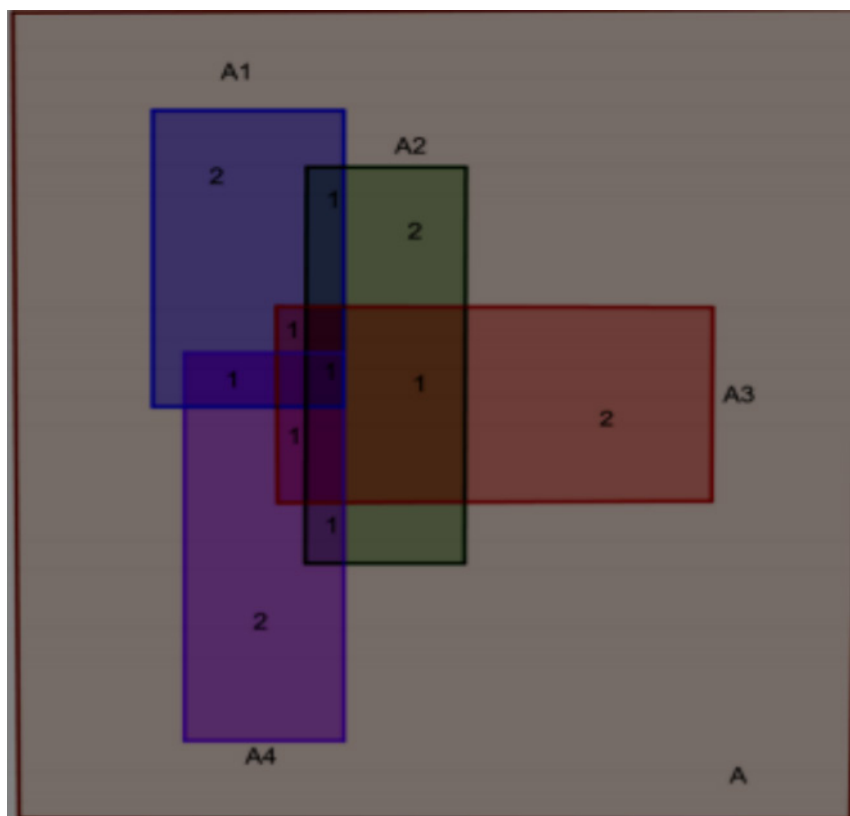
Figura 4 – Representação alternativa

Fonte: os autores

Quantas senhas pertencem a nenhum dos conjuntos A1, A2, A3 e A4?

O que esta pergunta significa?

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta proposta permite um envolvimento entre professores/alunos e uma troca de saberes. Acreditamos que esta metodologia pode ter um papel importante para o professor identificar, classificar e compreender as várias formas que um problema de análise combinatória poderá ser abordado/resolvido pelos alunos. Esperamos que isso sirva de motivação para mais pesquisas que busquem compreender a prática docente frente ao ensino de análise combinatória e que possam enriquecer e renovar a metodologia de ensino nesta área.

REFERÊNCIAS

BORBA, R.; PESSOA, C.; ROCHA, C.. **Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.15, Número Especial, pp.895-908, 2013.

BRASIL, Ministério da educação - secretaria de educação fundamental - **PCN´S Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação - secretaria de educação média e tecnológica. **PCN´S Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documento/BNCCAPRESENTACAO.pdf. Acesso em: 08 abr. 2019.

MORGADO, A.C.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FERNANDEZ, P.. **Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios**. 9 ed. Editora SBM: Rio de Janeiro, 2006.

PESSOA, C.; BORBA, R.. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série**. ZETETIKÉ, Campinas, v.17, n.31, jan/jun, 2009. p. 105-155, 2009.

CAPÍTULO 21
MATEMÁTICA EPISTOLAR

Data de aceite: 01/03/2021

Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB

RESUMO: O presente trabalho contém elementos de minha tese bem como de minha pesquisa "Matemática epistolar" desenvolvida na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia à luz da análise de algumas correspondências trocadas entre matemáticos que em muito contribuíram para a difusão dessa ciência nos séculos XVII ao XIX. A história da Matemática revela que por meio de epístolas, descobertas, novas teorias foram divulgadas antes mesmo de serem publicadas nos meios científicos da época além de revelar sentimentos entre seus pares.
PALAVRAS-CHAVE: Matemática, História, Conhecimentos, Epístola.

ABSTRACT: The present work contains elements of my thesis as well as of my research "Mathematical epistolary" developed at the State University of Southwest of Bahia in the light of the analysis some correspondences exchanged between mathematicians who contributed a lot to the diffusion of this science in the 17th and 19th centuries. The history of mathematics reveals that through epistles, discoveries, new theories were released even before they were published in the scientific circles of the time as well as revealing feelings among their peers.
KEYWORDS: Mathematics, History, Knowledge, Epistle.

1 I INTRODUÇÃO

O presente trabalho se caracteriza como pesquisa documentária, histórica e pedagógica quando destaca a relevância de trocas epistolares entre cientistas na difusão de conhecimentos como instrumentos de comunicação. Todas as fontes são traduções de documentos escritos na língua francesa, respeitando-se a semântica e a retórica próprias no cenário do século XVII ao século XIX. Algumas cartas se encontram traduzidas em minha tese *Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e seus trabalhos em Teoria dos Números* desenvolvida em 2007-2010 na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Na ocasião, apontamos algumas correspondências entre o matemático Legendre e outros acadêmicos que em muito contribuíram para a difusão das ciências. Em conjunção com essas informações incrementamos outros textos que fazem parte do meu projeto de pesquisa, em andamento, "Matemática epistolar: difusão de conhecimentos", realizado na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, instituição onde atuo como docente.

A etimologia da palavra *epístola* origina-se no grego antigo com o significado de ordem, mensagem, bem como no latim com o significado de carta ou mensagem escrita e não assinada.

Esse termo pode ser utilizado para denominar textos escritos em forma de carta e quando reunidas, as epístolas de determinado autor, podem ser publicadas por seu interesse histórico, literário, institucional, religioso ou documental. Muitos cientistas se comunicavam dessa forma e, tais cartas são de extrema importância para o avanço de descobertas e difusão das ciências. Na religião, o termo vem sendo utilizado há muito tempo, inclusive na Bíblia, onde encontramos no Novo Testamento as Epístolas de Paulo, doutrinas destinadas às comunidades cristãs em meados do primeiro século (D. C.). Também encontramos na literatura latina, as epístolas de Horácio (65 a.C - 8 a.C), Varrão (116 a.C - 27 a.C), Plínio (23 d.C - 79), Ovídio (43 a.C. - 17 ou 18 d.C), Sêneca (4 a.C. - 65) e Cícero (106–43 a.C) dentre outros filósofos romanos. As epístolas, no entanto, se diferem das cartas, pois emitem expressões e manifestos, além de discussões de questões que vão além dos interesses pessoais. Cunha (2002, p. 1) aponta que desde o final do século XX o interesse pela divulgação de correspondências vem aumentando pela análise das escrituras cotidianas entre pessoas comuns ou pelas escrituras científicas como fonte reveladora de hábitos, práticas, costumes de uma época. Em Taton (2000, p. 57, tradução nossa), encontramos que as correspondências científicas estabeleceram uma estreita ligação entre história, filosofia, epistemologia e as ciências exatas e naturais. Portanto, o estudo de epístolas é um campo frutífero para a pesquisa científica com vistas à difusão de conhecimentos que foram discutidos fora dos ambientes acadêmicos e das publicações em jornais científicos da época.

1.1 Personagens envolvidos

Adrien- Marie Legendre (1752-1833): contemporâneo dos matemáticos Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Monge (1746-1818) e Gauss (1777-1855) com importantes contribuições à Estatística, Teoria dos Números[1], Álgebra Abstrata e Análise Matemática. Legendre revelou um talento precoce para as ciências e aos 18 anos defendeu sua tese em Matemática e em Física. A cratera lunar Legendre tem esse nome em sua homenagem e dentre 72 cientistas, o seu nome está perpetuado na face Trocadero da Torre Eiffel em Paris.

August Leopold Crelle (1780-1855): matemático alemão. Fundador do periódico *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, também conhecido pelo apelido: *Journal de Crelle*. Fundado em 1826, tornou-se uma referência na comunidade matemática internacional no final do século XIX.

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851): matemático alemão que em muito contribuiu para o desenvolvimento de funções, integrais elípticas, dinâmica, equações diferenciais, Teoria dos Números além das equações diferencias ordinárias não-lineares. Jacobi foi o primeiro matemático judeu a ser nomeado professor em uma universidade alemã.

1. Á qual se dedicou mais da metade de sua vida no intuito de aperfeiçoá-la, tornando-se notória a honra que lhe é devida como o primeiro tratado de Aritmética superior que tanto inspirou outros matemáticos para o avanço dessa ciência no século XX.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855): conhecido como Príncipe da Matemática, astrônomo, físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas das ciências, dentre elas Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática, Geometria diferencial, Geodésia, eletroestática, astronomia e óptica.

Marie Sophie Germain (1776-1831): matemática, física e filósofa francesa com contribuições fundamentais à Teoria dos Números e à teoria da elasticidade. Marie-Sophie era autodidata, aprendendo com livros encontrados na biblioteca de seu pai. Ela é a ilustração típica do preconceito existente em relação ao trabalho feminino nos meios científicos de sua época e sob o pseudônimo "Monsieur Leblanc se correspondeu com matemáticos consagrados como Legendre, Lagrange e Gauss. Morreu de câncer aos 55 anos de idade.

Marin Mersenne (1588-1648): padre, teólogo, matemático, teórico musical e filósofo francês. Ficou conhecido sobretudo pelo seu estudo dos chamados primos de Mersenne. O asteróide 8191 Mersenne foi batizado em sua homenagem.

Niels Henrik Abel (1802 - 1829): matemático norueguês cujo primeiro trabalho relevante foi a demonstração da impossibilidade de resolver equações algébricas com graus maiores do que cinco por meio de radicais ao estabelecer relações entre as raízes, cujo estudos foram complementados por Galois (1811-1832) que determinou a condição necessária e suficiente desse problema da Álgebra Abstrata. Alguns de seus trabalhos tratam de problemas de convergência, de diferenciação, de integração de séries. Juntamente com Legendre, Abel revolucionou os estudos das funções elípticas.

Pierre de Fermat (1601-1665): magistrado francês que dividia sua profissão no serviço público com estudos matemáticos que notabilizou toda Paris na época, embora não estivesse ligado a nenhuma academia. Uma característica de Fermat é que ele descobriu vários resultados da Teoria dos Números, mas não os demonstrou. Nessa teoria se englobam os números poligonais, além do seu famoso teorema, conhecido como Último Teorema de Fermat, sobre a insolubilidade da equação $x^n + y^n = z^n$ no conjunto dos números naturais para $n > 2$. O teorema foi completamente demonstrado em 1995 pelo matemático britânico Andrew Willes (1953 -).

1.2 Situação desfavorável à reprodução científica na extinção da Academia de Ciências de Paris no período da Revolução Francesa e criação de outras academias na Europa

Em Ramos (2010) encontramos que o meio científico francês se destacou pelo fértil desenvolvimento científico dos acadêmicos das províncias e da Academia de Ciências de Paris, instituição criada na monarquia de Luís XIV pelo ministro Colbert em 1666. Seus concursos anuais eram disputados pelos maiores cientistas da Europa e na época do despotismo esclarecido tornou-se uma fonte de inspiração para diversos soberanos que se esforçaram na tentativa de imitá-la. Vários deles incentivaram a criação das academias nacionais, de centros de pesquisas e de ensino que permitiram os cientistas trabalharem

em condições favoráveis. Foi o caso de Frederico II da Prússia que em 1740 restaurou a Academia de Berlim, criada por Leibniz em 1700 e atraiu a atenção e dedicação de Euler (1741 a 1766), Lagrange (1766-1787) e Lambert (1765-1777). A criação da Universidade de Göttingen em 1773 na Alemanha contribuiu para o afloramento dos primeiros trabalhos de Gauss. Na Rússia Pedro, "o Grande criou a Academia de São Petersburgo em 1724 que atraiu os matemáticos suíços Nicolas Bernoulli (1687-1759) e Euler (1707-1783) destacamos também a criação da Academia Real de Londres em 1768. Nesse contexto, enquanto a Matemática do século XVII foi caracterizada por um grande número de matemáticos amadores, no século XVIII ficou marcado pelas obras de cientistas, de professores de universidades britânicas, italianas, suíças, membros da Academia de Paris e matemáticos itinerantes, atraídos por Berlim ou por São Petersburgo devido à política dos reis esclarecidos **(RAMOS, 2010, p 10)**.

No entanto a supressão da Academia de Ciências de Paris em 1793 prejudicou de forma significativa o desenvolvimento das ciências, das artes e das profissões, na contramão da vanguarda dos desenvolvimentos científicos na Europa nos séculos XVII e XVIII. O fechamento da Academia francesa foi conduzido pelo revolucionário Marat (1743-1793) em 1791, por interesse próprio uma vez que Marat nutria um grande ressentimento pelos acadêmicos, especialmente por Laplace, por terem rejeitado seu trabalho em Física de 38 páginas submetido à Academia em 1779, que dentre outros assuntos, eram críticas aos trabalhos de Newton. Marat chamava os acadêmicos de "aristocratas do saber" e segundo ele, era a representação de patrimônio elitista, instrumento de poder e de censura do Antigo Regime. Embora a maioria dos acadêmicos não sofresse nenhuma perseguição ostensiva, no período de 1793 a 1795, eles vivenciaram o período que ficou conhecido como *Terror:* regime instituído na França de 10 de novembro de 1793 a 28 de julho de 1794 por Robespierre[2]. Assim a Convenção Nacional se tornou o único centro de impulsão do governo que em princípio assumiu os três poderes. Um tribunal revolucionário foi constituído para julgar crimes políticos e era considerado inimigo da Revolução aquele que obstruía a liberdade pela força. Julgado sem testemunhas e sem direito advogado, duas sentenças eram possíveis: a liberdade ou a morte por guilhotina. Nesse período, três figuras eminentes das ciências foram submetidas a esse processo público: o astrônomo Bailly (1736-1793), o químico Lavoisier (1743-1794) e o matemático Condorcet (1743-1794), que, pela ligação com o Antigo Regime, foram vítimas do movimento de perseguições denominado de Período de Terror. A árdua e difícil incumbência de defender a Academia de Paris coube ao químico Lavoisier, um dos acadêmicos mais ilustre da época. Lavoisier fez uma defesa sólida da instituição, destacando a excelência dos trabalhos ali publicados no domínio das ciências e das artes. Seu discurso foi em vão pois Lavoisier foi guilhotinado em 8 de maio de 1794. Esse triste episódio histórico restringiu a produção e a publicação de trabalhos

2. Maximilien François Marie Isidore de Robespierre (1758-1794): advogado e político francês, e uma das personalidades mais importantes da Revolução Francesa. Os seus amigos chamavam-lhe "O Incorruptível.

científicos em jornais e boletins, assim como na supressão dos prêmios dos concursos da Academia. A dissolução da Academia de Ciências de Paris em 1793, impulsionou a criação das Escolas Normais onde Galois (1811-1832) foi um dos alunos, e Escolas Centrais para o ensino elementar de Matemática, Ciências Físicas e Naturais. As Escolas Militares e Politécnicas se tornaram referências para o ensino superior, cuja finalidade, segundo Taton (2000, p. 405, tradução nossa), era "o estabelecimento de instituições científicas, militares e técnicas''. Dois anos depois da supressão da Academia, no dia 22 de agosto de 1795, foi criado o Instituto Nacional das Ciências e de Artes que incorporou alguns dos acadêmicos. Em 1805, o Instituto foi transferido para o antigo Colégio das Quatro Nações. A partir de 1816 a Academia de Paris retomou a sua autonomia e até hoje faz parte do Instituto, atual Instituto da França. No século XIX, foram criadas, a Sociedade de Matemática (1865), Sociedade Francesa de Matemática (1872), Círculo Matemático de Palermo (1884), Sociedade Americana de Matemática (1888) e Sociedade Alemã de Matemática (1890). Na passagem dos séculos XVIII para o XIX, outros importantes meios de divulgação foram criados na Europa, a exemplo do *Jornal da Escola Politécnica* (1795), dos *Anais Matemáticos* de Gergonne (1810), do *Jornal de Matemática Pura e Aplicada* (1836) de Liouville, que conjuntamente com os *Comptes Rendus* (1835) das seções da Academia de Ciências de Paris, na França e *Diário* de Crelle (1826) em Berlim, dentre outros meios de divulgação científicas em muito contribuíram para a difusão de pesquisas, de correspondências de matemáticos nos século XVIII-XIX (RAMOS, 2010, p. 18-19).

Nesse momento, evocaremos algumas correspondências que além de contribuírem significativamente para o avanço da Matemática contém relações afetivas entre seus pares. Muitas cartas possuem apenas fragmentos como algumas correspondências entre Fermat a Mersenne.

1.3 Epístolas entre Fermat e Mersenne em1636

Segundo Goldstein (2004, p. 19), Fermat e Mersenne trocaram em torno de 40 cartas com conteúdos de níveis e assuntos variados sobre Aritmética entre 1636-1665. Em 1636 Fermat escreveu a Mersenne sobre a criação de um dispositivo para determinar as partes alíquotas (partes iguais) de 120 bem como sobre os números amigáveis[3] . Ele também se refere a uma outra carta enviada a Beaugrand, matemático francês membro da Academia de Mersenne[4] sobre o mesmo teor da qual não obteve resposta que se refere ao par de números amigáveis (17296, 18416), que foi descoberto de forma independente pelos matemáticos Ibn al-Banna e Al-Farisi no século XV e redescoberto por Fermat sobre o qual escreveu a Mersenne em carta de junho de 1636:

3. Números amigáveis são números pares onde um deles é a soma dos divisores do outro. Por exemplo, os divisores de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, cuja soma é 284. Por outro lado, os divisores de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 e a soma deles é 220.

4. Mersenne organizava encontros entre cientistas e frequentemente viajava pela Europa para se encontrar com alguns deles. Este círculo alargado de cientistas europeus é por vezes designado por «Academia de Mersenne», uma precursora da Academia de Ciências fundada em 1666 por Colbert, ministro de Luis XIV.

Há algum tempo enviei ao Sr. Beaugrand uma proposição sobre para determinar infinitos números amigáveis, sobre os quais lhe escrevi numa carta anterior, eu me dispus a resolver o problema. Se ele não perdeu essa carta, certamente ele lhe enviará para publicação na Academia. Aguardo a vossa opinião sobre essa proposição. (TANNER; HENRY, 1894, p. 21- tradução nossa)

Nesse mesmo ano, registramos uma carta de Mersenne a Fermat cujo teor se refere criação de outro dispositivo sobre as partes alíquotas de 120:

Senhor,

A respeito de vossa carta[5], com muito orgulho criei uma sequência numérica qualquer A, B, C, D, E, F de razão 2 e primeiro elemento igual a 2 as partes alíquotas de 120 a qual compartilho nesse momento. Á partir da sequência A, B, C, D, E, F formemos a nova sequência G, H, I ,K , L, M cujos elementos são os antecessores dos números G, H, I ,K, L, M bem como a sequência N, O, ,P ,Q , R, S formada pelos sucessores dos números da sequência G, H, I ,K, L, M. Como um dos números G, H, I ,K, L, M, por exemplo K, que dividido por um número N da última ordem distante de quatro filas à esquerda resulta num número primo; o triplo desse número primo multiplicado pelo número que precede imediatamente a K, será o número procurado. Como 15 dividido por 3 é igual a 5 que é um número primo triplo de 15 que multiplicado por 8 é 120. Acrescento ao que disse sobre as partes alíquotas de números na décima observação da primeira parte do prefácio geral[6] o método de encontrar o número semelhante a 120 conforme o dispositivo:

G	H	I	K	L	M
1,	3,	7,	15,	31,	63,
A	B	C	D	E	F
2,	4,	8,	16,	32,	64,
N	O	P	Q	R	S
3,	5,	9,	17,	33,	65,

Figura 1: DISPOSITIVO DE MERSENNE

Fonte: Tanner; Henry, (1894)

(TANNER; HENRY, 1894, p. 21-22, tradução nossa)

Analisando documentos das obras de Fermat, não há nenhum registo de carta ou de fragmento de carta com a resposta de Fermat a Mersenne sobre esse assunto.

5. Embora Mersenne admite tê-la recebido, aparentemente não foi publicada e seu teor é desconhecido pois a carta faz parte das correspondência desaparecidas de Fermat.

6. Nota nossa: Carta (desaparecida) de Fermat a Beaugrand (1636).

1.4 Correpondência entre Legendre e Crelle sobre Abel e Jacobi (1827)

Quando os trabalhos de Abel sobre resolução algébrica de equações começaram a chamar a atenção da comunidade matemática, Legendre desconhecia os estudos de Abel bem como de Jacobi conforme carta enviada a Crelle no início de 1827que foram publicados em jornais da época:

> *O que o Sr. me falou sobre o jovem Abel é absolutamente de acordo com a ideia que eu tinha dos grandes talentos dele, ao percorrer o caderno de vosso jornal onde se encontra um agradável tratado sobre funções elípticas. O Sr. Poisson me enviou no ano passado o caderno que enviastes para ele, pouco tempo depois de eu ter recebido a bela descoberta do Sr. Jacobi publicada no jornal do Sr. Schumacher através de uma carta a mim enviada pelo próprio autor. Essas produções dos dois jovens cientistas que até então me eram desconhecidos, me proporcionaram tanto o sentimento de satisfação quanto o de admiração.* (CRELLE *apud* HOLMBOE, 1839, p. VIII, tradução nossa)

1.5 Carta de Jacobi a Legendre com ênfase na lei de reciprocidade quadrática (1827)

Em 5 de agosto de 1827 Jacobi escreve a Legendre sobre alguns de seus estudos sobre a lei de reciprocidade quadrática[7] em que o seu método amplia a lei de reciprocidade para potências maiores do que dois:

> *Há muito tempo realizo algumas pesquisas sobre a Teoria dos Números, que me conduziram a resultados muito curiosos sobre a bela parte da disciplina aberta aos matemáticos pela vossa lei de reciprocidade[8]. De fato, partindo da nova teoria sobre a divisão da circunferência proposta pelo Sr. Gauss na oitava seção de Disquisitiones Aritmeticae, descobri um método que me levou aos teoremas fundamentais sobre a teoria de resíduos quadráticos, cúbicos, bi quadrados e mesmo sobre resíduos de potências maiores. Para dar uma ideia sucinta, transcrevo aqui a demonstração do teorema fundamental relativa aos resíduos quadráticos com base nesses novos princípios.*
>
> *Sejam p um número primo ímpar, x a raiz da equação* $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ *= 0 e g uma raiz primitiva da congruência* $g^{p-1} - 1 \;\; 0 \bmod p$. *Então* $x^g - x^{g^2} + x^{g^8} + \ldots - x^{g^{p-2}} = +\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ *. Em geral, temos que* $x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - x^{qg^8} + \ldots - x^{qg^{p-2}}$ *é igual a* $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ *ou igual a* $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$*, conforme g seja resíduo quadrático ou não resíduo quadrático de p.*
>
> *Mas sendo q um número primo, desprezando-se os múltiplos de q, temos que* $x^g - x^{g^2} + x^{g^8} + \ldots - x^{g^{p-2}} = (x^g - x^{g^2} + x^{g^8} + \ldots - x^{g^{p-2}})^q = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$*. Portanto q será resíduo ou não resíduo quadrático de p, conforme* $(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}}$ *dividido*

---

7. Nota nossa: a lei de reciprocidade dos resíduos quadráticos, estabelece uma relação particular entre dois números primos ímpares: se N é um número qualquer e *p* um número primo não divisor de N, tem-se que quando *c* é um número primo $4n + 1$, o expoente $\frac{c-1}{2}$ é par. Caso contrário, quando c é da forma $4n + 3$, esse expoente é ímpar.

8. Nota nossa: Aqui Jacobi faz alusão à relação entre Análise Indeterminada e Teoria dos Números.

por q deixa restos + 1 ou – 1, o que é precisamente, a lei de reciprocidade, ou de acordo com o Sr. Gauss, o teorema fundamental dos resíduos quadráticos. (JACOBI, 1998, p. 394, tradução nossa)

Ramos (2010, p. 251) destaca que três meses depois Legendre responde de Jacobi revelando ao amigo que ainda não havia apreciado suas descobertas por causa dos trâmites de publicação do livro *Teoria dos Números* (1830). No entanto, assegura ao amigo que iria analisá-las tão logo pudesse e que seus estudos seriam contemplados nessa obra. De fato Legendre realizou a terceira e última demonstração da lei: "dados dois números primos ímpares e distintos p e q então $= \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$, com os argumentos de Jacobi, conforme *Teoria dos Números* (1830), Artigo 681, parágrafo VI, Vol. II, p. 391-3. (RAMOS, 2010, p. 230)

1.6 Carta de Abel a Legendre sobre funções elípticas (1828)

Abel era dois anos mais jovem do que Jacobi e faleceu em 1829 aos 27 anos de idade. Foi professor de Matemática em Christiania, onde, primeiramente, ensinou Matemática elementar e mais tarde, Cálculo infinitesimal. Com muita avidez, impulsionado pelo seu professor Homboe (1795- 1850), se empenhou em estudar os trabalhos de Cálculo Diferencial e Integral de Euler (1707-1783), os trabalhos de Lacroix (1765-1843), Poisson (1781-1840), Gauss, Legendre e Lagrange. Manteve contato com alguns deles, como Legendre, Cauchy (1789-1857) e Crelle (1780-1855), do qual foi um amigo íntimo e um dos colaboradores do jornal que ele dirigia. Após estudar as obras de Lagrange em 1821, Abel se empenhou em demonstrar a impossibilidade se resolver equações do quinto grau por meio de radicais. Em 1824 ele conseguiu demonstrar a condição necessária mas não suficiente publicada e está presente no livro Legendre "*Teoria dos Números"* de 1830. (RAMOS, 2010)

Em carta de 25 de novembro de 1828, Abel demonstrou um grande contentamento em se corresponder com seu mestre Legendre ao declarar:

Foi um dos momentos mais felizes de minha vida por merecer a atenção de um dos grandes matemáticos do nosso século. Isso me incentivou a me empenhar com mais zelo os meus estudos, os quais continuarei com ardor e os atribuirei mais a vós do que a mim, por ter sido guiado pela tua luz.

[...] Não fiques zangado comigo Senhor, pois ainda ouso apresentar, mais uma vez, as minhas descobertas. Sobretudo sobre funções elípticas e as funções mais gerais da teoria de equações algébricas. Estou muito feliz por ter encontrado uma regra sobre como reconhecer se uma equação qualquer pode ser solúvel por radicais ou não. Um corolário de minha teoria diz que é impossível resolver equações de graus superiores a quatro. (ABEL, 1864, p. 279, tradução nossa.)

Contrariamente ao que ocorreu entre Legendre e Jacobi que tiveram um amplo relacionamento através de inúmeras cartas, enquanto que as informações sobre o relacionamento entre Abel e Legendre são baseadas em apenas duas das três cartas que foram trocadas entre esses dois matemáticos. (Holmboe, 1839, p. VIII-XI; Abel, 1864, p. 271 tradução nossa)

1.7 Correspondência entre Sophie Germain e Legendre (1811)

Stein (2006) aponta que Sophie Germain, por seu talento superior, não mantinha um bom relacionamento com os matemáticos de sua época, e sob o pseudônimo de M. Leblanc se correspondeu com Legendre, Lagrange e Gauss. Tempos depois identificada com seu nome verdadeiro, no início do século XIX, Sophie Germain conheceu o livro *Teoria dos Números* de Legendre, em Paris e segundo Stein (2006), ela e Legendre trocaram várias cartas que revelaram uma grande amizade e uma forte relação de confiança mútua.

No ano de 1823, Sophie Germain contribuiu com alguns resultados sobre números primos especiais, que levam seu nome, em um dos suplementos de Legendre *do Ensaio de Teoria dos Números* que em linguagem moderna, o Teorema de Sophie Germain pode ser assim enunciado: "Seja p um número primo ímpar. Se existe um número primo auxiliar Θ tal que existam duas p-ésimas potências mod Θ consecutivas e não nulas e não sendo o próprio p uma p-ésima potência mod Θ então nenhuma solução x, y ou z da equação de Fermat $x^p + y^p = z^p$ pode ser divisível por p^2. (LEGENDRE, 1823, p. 16-7, tradução nossa). Este teorema faz parte do trabalho de Legendre de 1823: *Sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat* (Sobre Alguns objetos quaisquer da Análise Indeterminada e particularmente sobre o Teorema de Fermat) onde $p < 100$ bem como outros de seus trabalhos foram contemplados, a exemplo de "se n e $2n + 1$ são números primos denominados números primos de Germain então segundo a equação de Fermat, um dos números x, y, z é divisível por n" e "se em geral se um dos números x, y, z for divisível por n então, necessariamente, ele será por n^2 e o mesmo ocorrerá para $x + y + z = p$, onde p é uma quantidade qualquer" (LEGENDRE, 1823, p. 5; 9, tradução nossa).

Por sua amizade com Sophie Germain em mais de uma ocasião, Legendre lhe revelou informações sigilosas enquanto componente da comissão científica da Academia de Paris em relação à análise de seus trabalhos para o seu ingresso na academia, conforme Carta de 4 de dezembro de 1811:

> *Senhorita, não tenho boas notícias sobre a análise do vosso Mémoire. Achamos que a vossa equação principal não é exata mesmo admitindo a hipótese de elasticidade em cada ponto... O Sr. Lagrange achou que, segundo essa hipótese, a equação verdadeira deve ser da forma*
>
> $(\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4})$ *= 0, onde z é bem pequeno.*

> *[...] Imagino que a mesma questão terá novamente num novo prazo e isso é mais do que necessário para sonhar com a vitória.* (LEGENDRE *apud* STEIN, 2006, p. 18, tradução nossa)

1.8 Carta de Jacobi a Legendre sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação $4(X^n - 1) = (X - 1)(Y^2 \pm nZ^2)$, onde n é um número primo da forma 4i ± 1 (1830)

> *Monsieur,*
>
> *[...] As distrações de uma longa viagem e de outras circunstâncias interromperam o fluxo dos meus trabalhos e eu não consegui retomá-los tão cedo. Eu estava acostumado a vos falar sobre Matemática e de pô-lo à par das novidades que porventura merecessem a vossa indulgência. Mas após ter recebido o precioso presente de um exemplar da terceira edição de vossa obra sobre Teoria dos Números eu me permito ir mais longe do que simplesmente me desculpar. A maior parte do volume II é inteiramente nova e mais uma vez admiro esse espírito vigoroso que vence todas as dificuldades, mesmo numa idade avançada, ainda serve de estímulo a jovens matemáticos que se dedicam ao progresso da ciência. [...] gostaria de fazer uma observação relativa à equação* $4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right) = Y^2 \pm nZ^2$. *Para encontrar Y, vossa obra apresentou uma regra para desenvolver* $2_{(x-1)}{}^{\frac{n-1}{2}}$ *e substituiu os coeficientes pelos menores resíduos das divisões por n. Essa regra que também se encontra na segunda edição somente pode ser utilizada para números primos não muito grandes. Em cada um dos casos os valores dos coeficientes de Y e Z são determinados por fórmulas conhecidas que expressam os coeficientes de uma equação por meio das somas das potências de suas raízes, somas que no nosso caso são ou* $\frac{-1+\sqrt{\pm n}}{2}$ *ou* $\frac{-1-\sqrt{\pm n}}{2}$. *Assim, uma vez que* $Y = 2(x-r)(x-r^4)\,(x-r^9)\ldots(x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}) = 2x^{\frac{n-1}{2}} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{n-5}{2}} + \ldots$, *a regra é correta para os três coeficientes a1, a2, a3, mas deixa de ser para os demais desde que n ultrapasse um certo limite. De maneira que os coeficientes de Y e Z podem ser maiores do que* $\frac{1}{2}$ *n, e mesmo n e suas potências* (JACOBI, 1998, p. 453, tradução nossa).

Esse resultado faz parte da adição aos artigos 511 e 512 do Parágrafo II, Quinta parte das segunda e terceira edições do *Ensaio...* (1808, 1830), em que Legendre desenvolveu um método para determinar todos os casos dos polinômios Y e Z que satisfazem à equação $4X = Y^2 \pm nZ^2$, onde n é um número primo da forma $4i \pm 1$ e X um polinômio igual ao quociente de $x^n - 1$ dividido por $x - 1$, com fundamento na hipótese insuficiente que os coeficientes dos diferentes termos da função Y são menores do que $\frac{1}{2}$ *n*. De fato, essas modificações foram frutos das observações na carta de Jacobi a Legendre de 02 de julho de 1830, onde o primeiro sugeriu correções aos erros cometidos por Legendre na obra *Teoria dos Números* publicada em 30 de abril de 1830. O erro encontrado na fórmula $Y = 2(x-r)(x-r^4)\,(x-r^9)\ldots(x-r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}) = 2x^{\frac{n-1}{2}} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{n-5}{2}} + \ldots$ pertence ao primeiro membro $2(x - r)$

$(x - r^4)\ (x - r^9)$ ... $(x - r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2})$ que, segundo Legendre, não é igual ao polinômio Y, mas sim igual a Y + $\sqrt{\pm n}$ Z e isso foi apontado na carta resposta de Legendre a Jacobi de 01 de outubro de 1830. Complementando essas informações, Jacobi sugeriu algumas modificações ao método de Legendre, em que os coeficientes da função Y eram menores do que $\frac{1}{2}n$. (RAMOS, 2010, p. 211-212)

Sobre esse mesmo assunto, porém numa ótica diferente, apresentamos a carta de 1831 que Sophie Germain, sob o pseudônimo de M. Leblanc escreveu a Gauss sobre a determinação das funções X e Y que satisfazem à equação 4 $\frac{(X^{N-1})}{(X-1}$ $= Y^2 \pm nZ^2$, onde N é um número primo da forma 4i ± 1:

> *Senhor,*
>
> *Admiro seus Disquisitiones arithmeticae (1801) há algum tempo e os uso em meus estudos. No último capítulo contém, dentre outras assuntos em belíssimo teorema sobre a equação* $\frac{4(Z^n-1)}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$ *(1) ... Creio que a mesma pode ser reescrita como* $\frac{4(Z^{n^s}-1)}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$ *onde n é um número primo e s um número qualquer... Tenho muito prazer em colaborar nesse trabalho ao tempo de me familiarizar com esse método em minhas novas descobertas. Essa última tem uma relação com a equação de Fermat* $x^n + y^n = z^n$ *cuja impossíbilidade com números inteiros foi demonstrada para n = 3 e n = 4. Creio que consigo provar essa impossibilidade para n = onde é um número primo da forma 8K7. (STEIN, p. 255, tradução nossa)*

Esse último destaque se refere às contribuições de Sophie Germain ao livro *Disquisitiones aritmecae* (1801) que abarca a Teoria dos Números, escrito em latim em 1798 quando Gauss tinha 21 anos. Gauss reuniu teorias variadas e generalidade de resultados que foram tratados com elegância e concisão dos métodos das teorias criadas por ele. Nessa belíssima obra encontramos a teoria de congruência que é base na Aritmética e da Teoria da ciclotomia sobre a resolução das equações do tipo $x^n - 1 = 0$, que por meio de equações do segundo grau permite determinar possibilidade da circunferência ser dividida em n partes iguais. A obra contém apenas a metade dos verdadeiros estudos de Gauss e muitos deles foram publicados postumamente pelo seu filho em 1855.

Ao discorrer sobre elogio nas Obras filosóficas e pensamentos e cartas inéditas de Marie Sophie Germain (1776-1831) de Hte Stupuy em 1896 (*Oeuvres philosophiques as suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une notice sur sa vie et ses oeuvres par Hte Stupuy, 1896*), Stupuy aponta que muitas mulheres são lembradas como celebridades em escritos frívolos, porém a única mulher francesa que foi audaciosa e vitoriosa em seus trabalhos científicos estimada pelo matemáticos da época, foi Sophie Germain. Para Stupuy a reputação discreta de Sophie tem o mesmo caráter. No entanto suas obras pertencem à posteridade na história das ciências do espírito humano. Marie Sophie Germain nasceu em Paris em abril de 1776 o seu pai era burguês liberal que perdeu toda sua fortuna no reinado do rei Louis XIV.

É nesse cenário que Sophie Germain cresceu na influência no vigor intelectual do século XVIII. Pelo o seu método de raciocínio adere à escola de Diderot (1713-1784) e Condorcet (1743-1794).

2 | CONCLUSÃO

Buscamos socializar e evidenciar a importância e os desafios das trocas epistolares entre matemáticos como meio de divulgação da evolução de conhecimentos através de correspondências pessoais nos séculos XVII - XIX. Nesse período, esse meio de comunicação foi bastante utilizado porm renomados matemáticos contemporâneos que superaram as dificuldades da distância e da falta de outros meios de divulgação de seus estudos. Muitas cartas se perderam ao longo do caminho ou no tempo, a exemplo de algumas cartas de Fermat. Sejam nas dificuldades de transmissão, sejam pelo desaparecimento de fontes primárias, os estudos sobre manuscritos de teor científico, filosófico ou literários não devem se limitar ao âmbito dos pesquisadores, especialistas em História da Matemática ou de outras áreas do conhecimento. Sobretudo, por aqueles que com fins diversos se enveredam num meio privilegiado de informações na compreensão do micro social da evolução de teorias que foram compartilhadas entre pares fora do ambiente das academias e dos meios de publicações impressas da época.

REFERÊNCIAS

ABEL, N. H. *Lettre de Abel à Legendre*. Mémoires de l' Académie des Sciences de l'Institut de France, Vol. 6, 1828, rééd. Paris: Gauthier-Villars, 1864, p. 271-279.

ARQUIVOS da Academia de Ciências de Paris. Disponível em: <http://fr.wikipedia.org/wiki/academie _des sciences>. Acesso em: 23 fev. 2010.

EPISTOLA. Disponível em : http://www.estudopratico.com.br/epistola-o-que-e-como-surgiu-e-suas-caracteristicas. Acesso em : 20 jan 2015.

CUNHA, Maria Teresa Santos*. A escrita epistolar e a história da educação.* Gt 02/ história da educação**.** Caxambu: 25º reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 29 de setembro a 2 de outubro de 2002 Disponível em: 2*5reuniao.anped.org.br/pôsteres/ mariateresasantoscunhap02.rtf*. Acesso em: 29 jan. 2015.

GOLDSTEIN, C. L'Arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne: une approche microsociale. Sciences et téchniques en perspective, IIe série, 8, 2004, p. 14 – 47.

HOLMBOE, B. *Oeuvres Complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des notes et développements, rédigées par ordre du Roi*. Tome Premier, Chapitres I et II, Christiania: Chr. Gröndahl, 1839, p. I-XVI; 1-24.

JACOBI, C. G. J. *Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi.* p 390- 461, Berlin: ed. C. W. Borchard, Journal fûr die reine und angerwandte Mathematik, Bud. p. 205-279, Leipzig: B. G. Stuttgart, 1998.

LEGENDRE, Adrien Marie. *Sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat.* Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Paris: Imprimerie Royale, n. 6, 1823, p. 1-60.

RAMOS, Maria Aparecida Roseane, *Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e seus trabalhos em Teoria dos Números,* (Tese de Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal: UFRN, 2010. Disponível em: <http://bdtd.bczm.ufrn.br/tedesimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4000.

______________________________Projeto de Pesquisa: *Matemática Epistolar, difusão de conhecimentos*. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. Em andamento.

STEIN, A. *Sophie Germain: mathématicienne extraordinaire*. Claremont: SRIPPS The women´s College, April, 2006, 79 p.

TANNERY, Paul; HENRY, Charles. Ouevres de Fermat. 1894. Disponível em: gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France. Acesso em: 01 jun. 2015.

TATON, R. *Le rôle et l´importance des correspondances scientifiques aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles.* Etudes d'histoire des sciences. Tome 47, Belgium: Brepolis Publishers, 2000, p. 57 – 68; 272 – 304; 404 – 535.

CAPÍTULO 22

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE GRAU DOIS: UMA NOVA ABORDAGEM

Data de aceite: 01/03/2021

Fernando Cézar Gonçalves Manso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Flávia Aparecida Reitz Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

RESUMO: Este artigo tem o intuito de apresentar uma nova abordagem para encontrar raízes de equações polinomiais de grau dois. Tendo como base a já conhecida fórmula de Bhaskara, o método Bhaskara/Φ proposto é mais sistemático e não depende de tentativa e erro como quando aplicamos as relações de Girard, por exemplo. O importante é que se tenha de forma simplificada um conjunto de ferramentas para o cálculo das raízes, o que acreditamos ser bastante útil, principalmente para alunos das séries iniciais. Para enriquecer, apresentamos ainda um panorama histórico acerca das equações polinomiais e a definição do método Po-Shen Loh para resolução das equações polinomiais. Tanto o método Bhaskara/Φ como o método Po-Shen Loh são detalhadamente apresentados e comparados na resolução das equações polinomiais de forma a facilitar o entendimento e proporcionar uma nova maneira de se encontrar as raízes das equações.

PALAVRAS-CHAVE: Equação polinomial de grau dois, Método de resolução, Bhaskara/Φ.

POLYNOMIAL EQUATION OF DEGREE TWO: A NEW APPROACH

ABSTRACT: This article aims to present a new approach to find roots of polynomial equations of degree two. Based on the already known Bhaskara formula, the proposed Bhaskara/Φ method is more systematic and does not depend on trial and error as when we apply Girard's relations, for example. The important thing is to have in a simplified way a set of tools for calculating the roots, which we believe to be quite useful, especially for students in the initial grades. To enrich it, we also present a historical overview about polynomial equations and the definition of the Po-Shen Loh method for solving polynomial equations. Both the Bhaskara/Φ method and the Po-Shen Loh method are presented in detail and compared in solving the polynomial equations in order to facilitate understanding and provide a new way if the roots of the equations are found.

KEYWORDS: Polynomial equation of degree two, Resolution method, Bhaskara/Φ.

1 I INTRODUÇÃO

Para os alunos do ensino médio, e até para alguns mais jovens, há uma familiarização com a forma de resolução de uma equação quadrática considerando, considerando o oposto de b, mais ou menos a raiz quadrada de b ao quadrado menos 4ac, todos divididos por 2a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esta fórmula (fórmula de Bhaskara) permite que sejam encontradas a raiz ou as raízes das equações quadráticas da forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Mas de onde veio esta fórmula? Por que civilizações mais antigas precisaram resolver equações desta forma em primeiro lugar? Responder a estas perguntas a partir de uma linha histórica é parte deste trabalho. O principal objetivo, no entanto, é apresentar uma nova abordagem de resolução equações polinomiais de grau dois (equações quadráticas) que esperamos possa contribuir de alguma forma para a consolidação desse conhecimento.

Apresentaremos dois métodos de resolução para as equações quadráticas:

1) Método de Po-Shen Loh (Universidade de Carnegie Mellon - Estados Unidos)

2) Método de Bhaskara/Φ (Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Brasil)

Os dois métodos têm por base o método de Bhaskara e representam uma simplificação operacional nos cálculos, o que acreditamos ser bastante útil, principalmente para alunos das séries iniciais.

2 I DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Seja uma função quadrática genérica da forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde x representa a variável desconhecida, e a, b e c representam coeficientes numéricos conhecidos, onde $a \neq 0$. Se $a = 0$, a equação é linear, não quadrática, pois não existe um termo ax^2. Os números a, b e c são os coeficientes da equação e podem ser distinguidos chamando-os, respectivamente, de coeficiente quadrático, de coeficiente linear e de termo constante ou independente (Boyer, 2010; Chaquiam, 2015).

Os valores de x que satisfazem a equação são chamados soluções da equação e raízes ou zeros da função. Uma equação quadrática tem no máximo duas soluções. Se não houver uma solução real, existem duas soluções complexas. Se houver apenas uma solução, diz-se que é uma raiz dupla. Uma equação quadrática sempre tem duas raízes, se raízes complexas forem incluídas e uma raiz dupla for contada para duas. Uma função quadrática pode ser fatorada em uma equação equivalente a:

$$f(x) = a(x - a)\ (x - \beta)$$

A partir desta forma fatorada podemos estabelecer duas relações importantes entre as raízes a e β:

1) soma (S)

2) produto (P)

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha . \beta = \frac{c}{a}$$

Tais relações são conhecidas como Relações de Girard e α e β são as soluções para x. A operação de completar quadrado em uma equação quadrática na forma canônica ($f(x) = a(x-m)^2 + k$) resulta na fórmula quadrática, que expressa as soluções em termos de a, b e c.

Como a equação quadrática envolve apenas um desconhecido, é chamada univariada. A equação quadrática contém apenas potências de x que são números inteiros não negativos e, portanto, é uma equação polinomial. Em particular, é uma equação polinomial de segundo grau, já que a maior potência é dois.

O desenvolvimento, ou derivação, de uma ideia matemática é geralmente o mais lógico, dedutível e retilíneo possível. Isso traz a noção comum de que seu desenvolvimento histórico é igualmente contínuo, lógico e retilíneo: um matemático adota uma ideia onde outro matemático a deixa.

Usando a fórmula quadrática como exemplo, é possível verificar que o desenvolvimento histórico da matemática não é de todo retilíneo. Em vez disso, desenvolvimentos paralelos, interconexões e confluências podem ser encontrados, os quais - para complicar ainda mais essas coisas - também estão relacionados a questões sociais, culturais, políticas e religiosas.

A chamada fórmula quadrática foi derivada no decorrer de alguns milênios à sua forma atual, que é ensinada para a maioria nas instituições de ensino. E as soluções para problemas que podem ser expressos em termos de equações quadráticas eram conhecidas já em 2000 aC (Dante, 2012; Silveira, 2015).

2.1 O problema original - 2000 (mais ou menos) aC

Os engenheiros egípcios, chineses e babilônios eram pessoas realmente inteligentes - eles sabiam como a área de um quadrado se ajusta ao comprimento de seu lado. Eles sabiam que é possível armazenar nove vezes mais fardos de feno se a lateral de um *loft* quadrado for triplicada. Eles também descobriram como calcular a área de projetos mais complexos, como retângulos e formas em *T* e assim por diante. No entanto, eles não sabiam como calcular os lados das formas - o comprimento dos lados, começando em uma determinada área - que muitas vezes era o que seus clientes realmente precisavam. E, portanto, este é o problema original: uma certa forma deve ser dimensionada com uma área total e, no final, são necessários comprimentos dos lados ou paredes para fazer uma planta de trabalho (Dante, 2012).

2.2 Os inícios - Egito - 1500 aC

O primeiro aspecto que finalmente levou à equação quadrática foi o reconhecimento de que ela está conectada a um problema muito pragmático, que por sua vez exigia uma solução rápida e certeira. Observa-se, nesse contexto, que a matemática egípcia não conhecia equações e números, como se faz hoje em dia; é descritivo, retórico e às vezes muito difícil de seguir. Sabe-se que os sábios egípcios (engenheiros, escribas e padres) estavam cientes dessa falha - mas criaram uma maneira de contornar esse problema: em vez de aprender uma operação ou uma fórmula que pudesse calcular os lados da área, eles calcularam a área para todos os lados e formas possíveis de quadrados e retângulos e formaram uma mesa de consulta. Esse método funciona da mesma maneira que se aprendem as tabuadas de cor na escola, em vez de fazer a operação corretamente (Eves, 2004).

Portanto, se alguém quisesse um *loft* com uma certa forma e uma certa capacidade de armazenar fardos de papiro, o engenheiro iria até sua mesa e encontraria o *design* mais adequado. Os engenheiros não tiveram tempo para calcular todas as formas e lados para fazer sua própria mesa. Em vez disso, a tabela que eles usavam era uma reprodução de uma tabela de consulta principal. Os reprodutores não sabiam se as coisas que estavam reproduzindo faziam sentido ou não, pois não sabiam nada sobre matemática. Portanto, obviamente, às vezes erros apareciam e as cópias das cópias eram menos confiáveis. Essas tabelas ainda existem e é possível ver onde os erros surgiram durante a cópia dos documentos (Eves, 2004).

2.3 O próximo passo - Babilônia e China - 400 aC

O método egípcio funcionou bem, mas uma solução mais geral - sem a necessidade de tabelas - parecia desejável. É aí que os *nerds* da Babilônia entram em cena. A matemática babilônica tinha uma grande vantagem sobre a usada no Egito, a saber, um sistema numérico que é praticamente igual ao que se usa hoje, embora em uma base hexagesimal, ou na base 60. A adição e multiplicação eram muito mais fáceis de executar com esse sistema, portanto, os engenheiros em torno de 1000 aC sempre podiam verificar novamente os valores em suas tabelas. Em 400 aC, eles encontraram um método mais geral chamado “completar o quadrado” para resolver problemas genéricos envolvendo áreas. Não há indicações de que essas pessoas usaram um procedimento matemático específico para descobrir as soluções; portanto, provavelmente algumas suposições equivocadas estavam envolvidas. Na mesma época, ou um pouco mais tarde, esse método também aparece em documentos chineses. Os chineses, como os egípcios, também não usavam um sistema numérico, mas uma verificação dupla de operações matemáticas simples foi surpreendentemente fácil pelo uso generalizado do ábaco (Dante, 2012).

2.4 Geometria - Área Mediterrânea Helenística - 300 aC

As primeiras tentativas de encontrar uma fórmula mais geral para resolver equações quadráticas podem ser rastreadas no desenvolvimento de grandes matemáticos da geometria e trigonometria: Pitágoras (500 aC em Croton, Itália) e Euclides (300 aC em Alexandria, Egito), que usavam estritamente abordagens geométricas e encontraram um procedimento geral para resolver a equação quadrática. Pitágoras notou que as relações entre a área de um quadrado e o respectivo comprimento do lado - a raiz quadrada - nem sempre eram inteiras, mas ele se recusava a permitir outras proporções além da racional. Euclides foi ainda mais longe e descobriu que essa proporção também pode não ser racional. Ele concluiu que números irracionais existem.

Os elementos de Euclides cobriram mais ou menos toda a matemática necessária para aplicações técnicas do ponto de vista teórico. No entanto, ele não usou a mesma notação com fórmulas e números como se usa atualmente. Por esse motivo, não foi possível calcular manualmente a raiz quadrada de qualquer número, a fim de obter uma boa aproximação para o valor exato da raiz, que é o que os arquitetos e engenheiros buscavam. Como todas as matemáticas (pelo menos teoricamente relevantes) pareciam estar completas, mas inúteis, as muitas guerras que ocorreram na Europa e também no início da Idade Média tornaram o mundo matemático na Europa silencioso até o século XIII. Nesse período, a matemática também sofreu uma grande mudança, passando de uma ciência pragmática para uma disciplina filosófica e mais mística (Eves, 2004).

2.5 Todos os números - Índia - 700 dC

A matemática hindu usa o sistema decimal pelo menos desde 600 aC. Uma das influências mais importantes na matemática hindu foi que ela era amplamente usada no comércio. O comerciante hindu era bastante rápido em matemática simples. Se alguém tivesse uma dívida, os números seriam negativos, se alguém tivesse um crédito, os números seriam positivos. Além disso, se alguém não tivesse crédito nem dívida, os números seriam zero. Zero é um número importante na história da matemática, e sua aparência relativamente tardia se deve ao fato de muitas culturas terem dificuldade em conceber o “nada”. O conceito do nada, o vazio, ou o conceito de equilíbrio já estava ancorado na cultura hindu.

Por volta de 700 dC, a solução geral para a equação quadrática, desta vez usando números, foi desenvolvida por um matemático hindu chamado Brahmagupta, que, entre outras coisas, usava números irracionais; ele também reconheceu duas raízes na solução. A solução final e completa como se conhece hoje veio por volta de 1100 dC, por outro matemático hindu chamado Baskhara. Baskhara foi o primeiro a reconhecer que qualquer número positivo tem duas raízes quadradas (Dante, 2012).

2.6 Poderosa ciência islâmica - Pérsia - 820 dC

Por volta de 820 dC, perto de Bagdá, Mohammad bin Musa Al-Khwarismi, um famoso matemático islâmico que conhecia a matemática hindu, também derivou a equação quadrática. A álgebra usada por ele era inteiramente retórica, e ele rejeitou soluções negativas. Essa derivação específica da fórmula quadrática foi trazida para a Europa pelo matemático/astrônomo judeu Abraham bar Hiyya (Savasorda) que viveu em Barcelona por volta de 1100 (Eves, 2004).

2.7 Renascença - Europa - 1500 dC

Com o Renascimento na Europa, a atenção acadêmica voltou aos problemas matemáticos originais. Em 1545, Girolamo Cardano, que era um típico cientista renascentista, e um dos melhores algebraistas de seu tempo, compilou os trabalhos relacionados às equações quadráticas - ou seja, ele misturou Al-Khwarismi solução com a geometria euclidiana. Ele possivelmente não foi o primeiro ou o único, mas o mais famoso. Em suas obras (principalmente retóricas), ele permite a existência de números complexos ou imaginários - isto é, raízes de números negativos. No final do século XVI, a notação e o simbolismo matemáticos foram introduzidos pelo matemático François Viète, na França. Em 1637, quando René Descartes publicou La Géométrie, nasceu a Matemática moderna, e a fórmula quadrática adotou a forma que se conhece hoje (Silveira, 2015).

2.8 Representações da função polinomial do segundo grau e suas raízes

A função polinomial do segundo grau, ou função quadrática, pode ser representada de formas distintas, merecendo destaque a forma geral $f(x) = ax^2+bx+c$ e a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2+k$. Há uma série de vantagens em se expressar uma função quadrática na sua forma canônica.

Chegamos à forma canônica partindo da forma geral, em dois passos:

1) Estabelecendo as ordenadas do vértice da parábola *V* (m, k)

Para se determinar o vértice de uma função polinomial do segundo grau, na sua forma geral, faz-se uma derivação e se iguala a equação a zero, ou seja:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = m$$

Com isso, obtém-se a abscissa *x* ou *m* do vértice da parábola. Substituindo então *m* na função geral, obtém-se a ordenada *y* ou *f*(*m*) do vértice:

$$f(m) = \frac{\cancel{a}b^2}{4\cancel{a}^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$f(m) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(m) = -\frac{\Delta}{4a} = k,$$

logo *V* (*m*, *k*).

2) Aplicando o método de completar os quadrados

Primeiramente colocar o a em evidência:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Após, completar quadrado entre *x* e $\frac{b}{2a}$:

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \therefore f(x) = a(x - m)^2 + k$$

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

Dessa forma, tem-se que:

Se a < 0: f(x) terá um valor máximo se x = m ∴ f(x) = k

$$v = (m, k) \therefore m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Se a > 0: f(x) terá um valor mínimo se x = m ∴ f(x) = k

$$v = (m, k) \therefore m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Agora estamos aptos para, a partir da forma canônica, chegarmos na fórmula de Bhaskara apresentada no início deste texto.

Para a obtenção das raízes, iguala-se a função na sua forma canônica a zero:

$$a(x-m)^2 + k = 0$$

$$(x-m)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x - m = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x = m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$m = -\frac{b}{2a}$$

$$k = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}},$$

Portanto, a fórmula de Bhaskara é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Natureza das raízes - discriminante Δ

Uma função polinomial de grau dois terá sempre duas raízes, a saber:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1) Se $\Delta > 0$: a e β são raízes reais e distintas

2) Se $\Delta = 0$: a e β são raízes reais e iguais

3) Se $\Delta < 0$: a e β são raízes complexas e conjugadas onde $i = \sqrt{-1}$

2.9 Método de Po-Shen Loh

2.9.1 Descrição do método

O método consiste numa simplificação da fórmula de Bhaskara com o intuito de tornar os cálculos mais simples e diretos e não há restrição, podendo ser aplicado em qualquer equação quadrática. Neste método, o valor do coeficiente a é obrigatoriamente 1 (a = 1) e definiremos o parâmetro *P*. A solução para as equações polinomiais de grau dois será dada por:

$$x = -\frac{b}{2} \pm |P|,$$

onde $|P|$ será encontrado pela expressão:

$$P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Todas estas equações podem ser obtidas por manipulações algébricas a partir da fórmula de Bhaskara.

Resumindo:

se a = 1

$$P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm |P|$$

2.9.2 Demonstração da validade do método

Partimos da fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para a = 1, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

que podemos reescrever como

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

Como $P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$, temos que $x = -\frac{b}{2} \pm |P|$.

2.9.3 Passo a passo para aplicação do método e exemplo

1) verificar se a = 1. Caso não seja, dividir todos os coeficientes por a para se trabalhar com a nova equação gerada;

2) calcular $|P|$ a partir de $P^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$;

3) calcular x_1 e x_2 pela expressão $x = -\frac{b}{2} \pm |P|$.

Para exemplificar, serão determinadas as raízes da equação pelo método de Po-Shen Loh.

Ex1: $x^2 - 5x + 6 = 0$

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6$$

$$P^2 = \left(\frac{25}{4}\right) - \left(\frac{24}{4}\right)$$

$$P^2 = \frac{1}{4}$$

$$P = \pm\frac{1}{2}$$

$$|P| = \frac{1}{2}$$

P3)

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2$$

3 | MÉTODO DE BHASKARA/Φ

3.1 Descrição do método

O método consiste numa simplificação da fórmula de Bhaskara com o intuito de tornar os cálculos mais simples e direto, nos casos em que seja possível substituir delta (Δ), da fórmula de Bhaskara, por Φ^2. A simplificação ocorrerá porque substituiremos a raiz quadrada de delta por uma soma ou diferença entre dois números naturais ($F \pm f$). Deste modo, temos:

$$\sqrt{\Delta} = F \pm f = \Phi^2$$

e a solução para as equações polinomiais de grau dois será dada por:

$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

Para obtermos os naturais F e f com $F \geq f$ temos dois casos a considerar:

1) ac < 0. Neste caso escrevemos todos os *i*ésimos produtos possíveis $\forall\,(F.f)_i$ que nos forneça o módulo do produto ac, ou seja, $|ac| = \forall(F.f)_i$. Se o método for aplicável, existirá um *i*ésimo par (F_i, f_i) cuja diferença expressará o módulo de *b*, ou seja, se $ac < 0, \exists(F_i, f_i)/|b| = (F - f)_i$. Deste modo, definimos o parâmetro Φ como sendo a soma dos naturais $(F,f)_i$, ou seja, $\Phi = (F+f)_i$ e, a solução da equação quadrática, será $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

Resumindo, se ac < 0 :

$$|ac| = \forall(F.f)_i;\ F, f \in \mathbb{N}, F \geq f$$

$$|b| = (F - f)_i$$

$$\Phi = (F + f)_i$$

$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

2) ac > 0. Neste caso escrevemos todos os *i*ésimos produtos possíveis $\forall\ (F.f)_i$ que nos forneça o módulo do produto ac, ou seja, $|ac| = \forall(F.f)_i$. Se o método for aplicável, existirá um *i*ésimo par (F_i, f_i) cuja diferença expressará o módulo de *b*, ou seja, se ac > 0, $\exists(F_i, f_i)/|b| =$ $(F+f)_i$. Deste modo, definimos o parâmetro Φ como sendo a soma dos naturais $(F,f)_i$, ou seja, $\Phi = (F-f)_i$ e, a solução da equação quadrática, será $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

Resumindo, se ac > 0:

$$|ac| = \forall(F.f)_i;\ F, f \in \mathbb{N}, F \geq f$$

$$|b| = (F + f)_i$$

$$\Phi = (F - f)_i$$

$$x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}.$$

3.2 Demonstração da validade do método

Dada a fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e a fórmula de resolução do método Bhaskara/Φ $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$, dividiremos a demonstração nos dois casos apontados anteriormente: 1) ac < 0 e 2) ac < 0. Em ambos os casos precisamos, a partir das hipóteses levantadas, demonstrar que $\sqrt{\Delta} = \Phi$ ou $\Delta = \Phi^2$.

1º caso: ac < 0

Hipótese 1: ac < 0

Hipótese 2: $|ac| = F.f;\quad F \geq f;\qquad F, f \in N$

Hipótese 3: $|b| = F - f$

Tese: $(F + f)^2 = \Delta$

Partimos da expressão de delta $\Delta = b^2 - 4ac$. Pela hipótese 3 temos que $|b| = F - f$, então escrevemos:

$$\Delta = (F - f)^2 - 4ac.$$

Pelas hipóteses 1 e 2 temos que $ac = -Ff$, então escreveremos:

$$\Delta = (F - f)^2 + 4Ff,$$

o que nos leva a:

$$\Delta = F^2 - 2Ff + f^2 + 4Ff,$$

portanto:

$$\Delta = F^2 + 2Ff + f^2,$$

o que nos leva à tese $(F+f)^2 = \Delta$.

2º caso: ac > 0

Hipótese 1: ac > 0

Hipótese 2: $|ac| = F.f;\quad F \geq f;\quad F, f \in N$

Hipótese 3: $|b| = F + f$

Tese: $(F-f)^2 = \Delta$

Partimos da expressão de delta $\Delta = b^2 - 4ac$. Pela hipótese 3 temos que $|b| = F + f$, então escrevemos:

$$\Delta = (F+f)^2 - 4ac.$$

Pelas hipóteses 1 e 2 temos que , então escreveremos:

$$\Delta = (F+f)^2 - 4Ff,$$

o que nos leva a:

$$\Delta = F^2 + 2Ff + f^2 - 4Ff,$$

portanto:

$$\Delta = F^2 - 2Ff + f^2,$$

o que nos leva à tese $(F-f)^2 = \Delta$.

3.3 Passo a passo para aplicação do método e exemplo

1) verificar se ac < 0 ou ac > 0;

2) escrever todos os *i*ésimos produtos possíveis para lacl na forma $(F.f)_i$ com $F, f \in N$ e $F \geq f$;

3) escrever $|b| = F - f$ se $ac < 0$ ou $|b| = F + f$ se $ac > 0$;

4) escrever $\Phi = F + f$ se $ac < 0$ ou $\Phi = F - f$ se $ac > 0$;

5) calcular x_1 e x_2 pela expressão $x = \frac{-b \pm \Phi}{2a}$.

Para exemplificar, serão determinadas as raízes da equação pela nova forma:

Ex1: $x^2 - 5x + 6 = 0$

P1)

$$ac = 6 > 0$$

P2)

$$|ac| = 6.1$$

$$|ac| = 3.2$$

P3)

$$|b| = 3 + 2 = 5$$

P4)

$$\Phi = 3 - 2 = 1$$

P5)

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2$$

3.4 Parâmetro Φ como discriminante da equação quadrática

Como $\Phi = \sqrt{\Delta}$, temos:

se $\Delta > 0 \therefore \Phi > 0$ ∃ duas raízes reais distintas;

se $\Delta = 0 \therefore \Phi = 0$ ∃ duas raízes reais iguais (uma raiz real de multiplicidade dois)

se $\Delta < 0$ ou $\Delta \neq \Phi^2$ o método não se aplica.

Temos aí, portanto, uma importante restrição na aplicabilidade do método. Nesses casos não será possível escrever $|b| = F \pm f$. Assim, se para uma dada equação quadrática não for possível escrever $|b| = F \pm f$, isso significa que $\Delta < 0$ ou $\Delta \neq \Phi^2$ e, então, precisamos aplicar a fórmula de Bhaskara ou o método de Po-Shen Loh, que não apresentam nenhum tipo de restrição.

4 I APLICAÇÕES DOS MÉTODOS

Para exemplificar, serão determinadas as raízes das equações pela nova forma: Ex1: $2x^2 + 7x + 5 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

$$ac = 2.5 = 10 > 0$$

P2)

$$|ac| = 10.1$$

$$|ac| = 5.2$$

P3)

$$|b| = 5 + 2 = 7$$

P4)

$$\Phi = 5 - 2 = 3$$

P5)

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = -\frac{5}{2}$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a \neq 1 \therefore x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$$

$$P^2 = \left(\frac{49}{16}\right) - \left(\frac{40}{16}\right)$$

$$P^2 = \frac{9}{16}$$

$$P = \pm\frac{3}{4}$$

$$|P| = \frac{3}{4}$$

P3)

$$x = -\frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = -\frac{5}{2}$$

Ex2: $4x^2 - 5x - 6 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

ac = 4.(-6) = -24 < 0

P2)

lacl = 24.1

lacl = 12.2

lacl = 8.3

lacl = 6.4

P3)

lbl = 8 -3 = 5

P4)

Φ = 8 + 3 = 11

P5)

$$x = \frac{5 \pm 11}{8}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -\frac{3}{4}$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a \neq 1 \therefore x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} = 0$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

$$P^2 = \left(\frac{25}{64}\right) + \left(\frac{96}{64}\right)$$

$$P^2 = \frac{121}{64}$$

$$P = \pm\frac{11}{8}$$

$$|P| = \frac{11}{8}$$

P3)

$$x = \frac{5}{8} \pm \frac{11}{8}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -\frac{3}{4}$$

Ex3: $x^2 + x - 12 = 0$

Por Bhaskara/Φ

P1)

ac = 1.(-12) = -12 < 0

P2)

lacl = 12.1

lacl = 6.2

lacl = 4.3

P3)

lbl = 4 - 3 = 1

P4)

Φ = 4 + 3 = 7

P5)

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$x_1 = 3$ e $x_2 = -4$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12$$

$$P^2 = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{48}{4}\right)$$

$$P^2 = \frac{49}{4}$$

$$P = \pm\frac{7}{2}$$

$$|P| = \frac{7}{2}$$

P3)

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -4$$

Ex4: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.4 = 4 > 0$$

P2)

$$|ac| = 4.1$$

$$|ac| = 2.2$$

P3)

$$|b| = 2 + 2 = 4$$

P4)

$$\Phi = 2 - 2 = 0$$

P5)

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 2$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

$$P^2 = 4 - 4$$

$$P^2 = 0$$

$$P = \pm 0$$

$$|P| = 0$$

P3)

$$x = 2 \pm 0$$

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 2$$

Ex5: $x^2 + 4x - 5 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.(-5) = -5 < 0$$

P2)

$$|ac| = 5.1$$

P3)

$$|b| = 5 - 1 = 4$$

P4)

$$\Phi = 5 - 1 = 4$$

P5)

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -5$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2$$

$$P^2 = 4 + 5$$

$$P^2 = 9$$

$$P = \pm 3$$

$$|P| = 3$$

P3)

$$x = -2 \pm 3$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -5$$

Ex6: $x^2 - 2x - 8 = 0$

Por Bhaskara/ Φ

P1)

$$ac = 1.(-8) = -8 < 0$$

P2)

$$|ac| = 8.1$$

$$|ac| = 4.2$$

P3)

$$|b| = 4 - 2 = 2$$

P4)

$$\Phi = 4 + 2 = 6$$

P5)

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -2$$

Por Po-Shen Loh

P1)

$$a = 1$$

P2)

$$P^2 = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + 8$$

$$P^2 = 1 + 8$$

$$P^2 = 9$$

$$P = \pm 3$$

$$|P| = 3$$

P3)

$$x = 1 \pm 3$$

$$x_1 = 4 \text{ e } x_2 = -2$$

5 I CONCLUSÃO

Funções polinomiais são importantes porque podem modelar inúmeros problemas em variadas áreas, e são de relativamente fácil manipulação. Funções polinomiais de grau dois são apresentadas aos estudantes já nas séries inicias e uma plena compreensão

deste assunto é fundamental para que estes estudantes se apropriem, adequadamente, do conceito de funções. Neste artigo destacamos o cálculo de zeros de uma função ou raízes de equações quadráticas, apresentando de forma inédita como contribuição dos autores o método Bhaskara/Φ, que juntamente com o método Po-Shen Loh (do autor norte americano de mesmo nome), têm por objetivo propiciar aos estudantes, quando comparado ao método tradicional, manobras mais simples e diretas de encontrar as raízes para as equações quadráticas. Uma outra forma de encontrar as raízes é pelas relações de Girard $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; e $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$, mas neste artigo damos ênfase aos métodos Bhaskara/Φ e Po-Shen Loh por serem métodos mais sistemáticos e não depender de tentativa e erro quando aplicamos as relações de Girard. O importante é que se tenha um conjunto de ferramentas para o cálculo das raízes. Ambos os métodos tratados no texto têm por base a já tradicional fórmula de Bhaskara.

No intuito de enriquecer ainda mais o texto, apresentamos todo um panorama histórico à cerca das equações quadráticas e os autores desejam e esperam que este texto possa ajudar professores e estudantes das séries iniciais ao aplicar as ferramentas para o cálculo de zeros de funções quadráticas.

Nosso agradecimento à estrutura da UTFPR-CM, nosso ambiente de trabalho, que nos possibilita pensar estratégias para o aprimoramento da prática matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto teláris**: matemática. 1.ed. São Paulo: Ática, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

SILVA, M. N. P. **O surgimento da equação do 2º Grau**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/o-surgimento-equacao-2-o-grau.htm. Acesso em 03 de abril de 2020.

SILVEIRA, E. **Matemática**: compreensão e prática. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2015.

CAPÍTULO 23

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: ANÁLISE DE ESQUEMAS ELABORADOS DURANTE ATIVIDADE MATEMÁTICA INTERATIVA

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 12/01/2021

Ivana de Oliveira Freitas
Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA
Caçapava do Sul – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/2152844693238724

Ângela Maria Hartmann
Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA
Caçapava do Sul – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/6348630855781978

RESUMO: A Teoria dos Campos Conceituais tem sido apontada como uma das possibilidades de explicar as estratégias utilizadas por estudantes durante o uso pedagógico de jogos em Matemática, pois ela propõe uma estrutura capaz de identificar as filiações e rupturas entre conhecimentos e analisar a forma como acontece a construção do conhecimento durante a atividade matemática. Os jogos são comumente aceitos no ensino da Matemática, devido às suas dimensões lúdicas e educativas e por estimular o raciocínio lógico de alunos. Tendo como ponto de partida o problema de pesquisa: "quais esquemas são utilizados por estudantes durante a aplicação de atividade envolvendo jogos matemáticos?", utilizou-se dessa teoria para analisar os esquemas acionados pelos estudantes durante o desenvolvimento de um jogo baseado no raciocínio matemático. Para tal, a abordagem metodológica baseou-se na aplicação de jogo matemático a seis estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Caçapava do Sul/RS. As partidas foram gravadas em áudio e vídeo e posteriormente transcritas e analisadas utilizando os pressupostos da teoria. Os resultados mostram que houve o acionamento de todas as categorias descritas na Teoria dos Campos Conceituais, sendo que algumas foram acionadas mais de uma vez por diferentes estudantes A teoria também possibilita observar e analisar se os estudantes reconhecem, entendem e sabem utilizar os elementos simbólicos da Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Campos Conceituais, Jogos Matemáticos, Ensino Fundamental.

THEORY OF CONCEPTUAL FIELDS: ANALYSIS OF ELECTRICAL SCHEMES DURING INTERACTIVE MATHEMATICAL ACTIVITY

ABSTRACT: The Theory of Conceptual Fields has been pointed out as one of the possibilities to explain the strategies used by students during the pedagogical use of games in Mathematics, as it proposes a structure capable of identifying the affiliations and ruptures between knowledge and analyzing the way the construction of the knowledge during mathematical activity. Games are commonly accepted in the teaching of mathematics, due to their playful and educational dimensions and because they stimulate students' logical reasoning. Taking as a starting point the research problem: "what schemes are used by students during the application of activity involving mathematical games?", This theory was used to analyze the schemes triggered by students during the development of a game

based on in mathematical reasoning. To this end, the methodological approach was based on the application of a mathematical game to six students from the 7th year of elementary school at a state school in Caçapava do Sul / RS. The matches were recorded in audio and video and later transcribed and analyzed using the assumptions of the theory. The results show that all categories described in the Theory of Conceptual Fields were triggered, with some being triggered more than once by different students. The theory also makes it possible to observe and analyze whether students recognize, understand and know how to use the symbolic elements of Mathematics.
KEYWORDS: Conceptual Fields, Mathematical Games, Elementary School.

1 I INTRODUÇÃO

No ensino da Matemática, uma das dificuldades que os professores enfrentam é tentar ensinar um conteúdo tido pelos estudantes como de difícil compreensão e, consequentemente, fazer com que eles se sintam atraídos pela componente. Por outro lado, documentos como "Compromisso Nacional pela Educação Básica" (BRASIL, 2019) divulgado pelo Ministério da Educação – MEC, Conselho Nacional de Secretários de Educação – CONSED e União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação – UNDIME mostram que os dados do Brasil no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA (média das notas de ciências, leitura e matemática) estão baixos quando comparados com os demais países que compõem a América Latina. Exemplo disso, enquanto o Chile apresentou média de 443 em 2015, o Brasil apresentou média de 395, estando acima, somente do Peru, que apresentou média de 394.

Uma das maneiras de se contornar isso é a utilização de diferentes metodologias. Uma das utilizadas na área da Matemática, e em outras áreas do conhecimento, são os jogos pedagógicos. Essa metodologia é comumente aceita no ensino da Matemática por possuir dimensões lúdicas e educativas (NASCIMENTO, 2016), além de possibilitar visualizar as estratégias e o raciocínio matemático utilizado pelos estudantes durante as etapas do jogo (VIEIRA; SANTOS, 2012).

Um jogo em que é possível fortalecer o raciocínio dos estudantes, assim como seu interesse pela Matemática e revisar conceitos matemáticos é o jogo do NIM, que teve sua primeira aparição no trabalho acadêmico de Bouton (1901). Em uma das versões deste jogo, são dispostos um número "*x*" de palitos em uma fila, dois jogadores, cada um em sua vez de jogar, retira um determinado número de palitos, e, aquele que ficar com o último palito sobre a mesa perde. Nesta configuração, utiliza-se o método da divisão. Surge assim, o problema de pesquisa: quais esquemas são utilizados por estudantes durante a aplicação de atividade envolvendo jogos matemáticos?

Uma maneira de investigar o raciocínio utilizado pelos estudantes durante o jogo é utilizando a Teoria dos Campos Conceituais de Gèrard Vergnaud. Esta teoria busca entender a maneira pela qual as crianças fazem uso dos princípios aditivos e multiplicativos

em atividades matemáticas, mas também pode ser transposta e utilizada em outras áreas do conhecimento.

2 | A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A finalidade desta teoria é "*propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por 'conhecimento', tanto as habilidades quanto as informações expressas*" (VERGNAUD, 1993, p. 1). A partir desta teoria é possível analisar os esquemas acionados pelos estudantes durante o desenvolvimento do jogo proposto. Com esta teoria é possível observar e analisar se os estudantes reconhecem elementos simbólicos da Matemática e se e os entendem e se sabem utilizá-los. Para Vergnaud (1993) o esquema permite, em sua totalidade, "*gerar uma classe de comportamentos diferentes em função das características particulares de cada situação da classe a que se destina*" (VERGNAUD, 1993, p. 19).

Existem quatro ideias fundamentais na Teoria dos Campos Conceituais, os quais servem tanto para entendê-la quanto para aplicá-la. São elas: esquemas, conceitos, situações e invariantes operatórios.

Os esquemas constituem a organização invariante de um determinado comportamento de acordo com a situação em que o indivíduo enfrenta (VERGNAUD, 1993). A partir das ações que o indivíduo realiza e dos elementos que ele utiliza, é possível analisar como decorre a construção do seu conhecimento, visto que é nos esquemas que isto ocorre. Esses esquemas podem ser operatórios, quando o indivíduo dispõe das ferramentas necessárias para tratar da situação enfrentada, ou não operatórios, quando o indivíduo necessita refletir e procurar novos meios e ferramentas para enfrentar a situação.

Moreira (2002) destaca quatro situações nas quais são aplicados os esquemas (quadro 1).

	SITUAÇÕES	**DESCRIÇÃO**
1	Metas e antecipações	Um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos.
2	Regras de ação do tipo "se... então".	Que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequencia de ações do sujeito.
3	Invariantes operatórios	(teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas.

4	Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora".	As regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação.

Quadro 1 – Situações que diferem a aplicação de esquemas

Fonte: MOREIRA, 2002, p. 12-13.

Invariantes operatórios são componentes essenciais dos esquemas, pois além de estarem contidos são também os conhecimentos dos esquemas. Em linhas gerais, o termo "invariantes operatórios" é comumente utilizado para abranger as expressões "teorema-em-ação", que de acordo com Vergnaud (1996; 1998) *"é uma proposição tida como verdadeira"* e "conceito-em-ação", onde é *"uma categoria de pensamento tida como pertinente"*. No entanto, não se pode considerar tanto conceito-em-ação como sendo um conceito científico, quanto o teorema-em-ação como sendo um teorema tido como verdadeiro e de modo explícito. Isso ocorre, pois enquanto dentro da ciência pode-se discutir tanto sobre veracidade quanto pertinência de conceitos e teoremas, enquanto nos invariantes operatórios não ocorre o mesmo. No entanto, isso pode ser modificado, pois estudantes não expressam os conceitos e teoremas que utilizam através de linguagem natural, pois eles, em sua maioria, nem fazem ideia do que realmente estão utilizando, ou seja, utilizam os invariantes de maneira implícita. Isso pode modificar-se com o auxílio o professor, fazendo com que conceitos e teoremas-em-ação tornem-se conceitos e teoremas científicos explícitos, visto conceitos-em-ação e teoremas-em-ação são complementares dos conceitos e teoremas científicos.

Situações é um conjunto de combinação de tarefas, e possui duas ideias principais: de variedade e da história. A primeira, de variedade, diz que dentro de cada campo conceitual há uma variedade de situações, e a segunda, da história, remete que é a partir dessas situações que o indivíduo elabora seu conhecimento. Vergnaud (1993) diz que são as primeiras situações que o indivíduo enfrenta responsáveis pelas concepções que ele tem, pois, segundo Vergnaud, ou somos capazes de dominar essas situações ou às modificamos.

Os conceitos, dentro da Teoria dos Campos Conceituais devem ser analisados, não somente através de suas definições, mas sim através da construção cognitiva desses conceitos por parte dos indivíduos. Os conceitos dentro dessa teoria é formado de uma trinca de conjuntos "C = (S, I, Y)", sendo C equivalente a conceito, S à "situações que dão sentido ao conceito" (VERGNAUD, 1993, p. 8), I é o "conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas" (VERGNAUD, 1993, p. 8), e Y o "conjunto das formas de linguagem [...] que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento" (VERGNAUD, 1993, p. 8). Temos, então que o conjunto das referências (S), do significado (I) e do significante (Y)

forma a trincado conjunto que dão sentido ao conceito. Vergnaud (1988, p. 141) diz que um campo conceitual é formado por um conjunto de situações, onde o indivíduo necessita ter o domínio de vários conceitos distintos uns dos outros.

2.1 Classificações dos esquemas da teoria dos campos conceituais

Os esquemas, elaborados de acordo as categorias criadas por Vergnaud, (1993) são apresentados por Grings *et al.* (2008). Essas categorias são divididas em duas classes. Uma que ilustra os esquemas que os estudantes possuem para resolver uma determinada situação, e outra em que os estudantes procuraram em outros esquemas aquele que resolva a situação. No quadro 2 podemos observar essas duas categorias.

Siglas	Categorias
EP	Interpretar nas falas dos estudantes se os esquemas utilizados são esquemas prontos (EP). Neste caso é acionado um só esquema que dá conta da situação.
EC	Examinar os esquemas que estão sendo construídos (EC) durante a ação. Ao enfrentarem as situações fazem uso de vários esquemas, que vão sendo combinados e recombinados até a obtenção do esquema adequado.

Quadro 2 – Categorias de análise considerando os esquemas elaborados.

Fonte: Grings *et al.* (2008, p. 7)

Após o estudante construir o esquema, analisamos os componentes que compõem cada um, de maneira que possa ser observado como cada estudante encontra a solução para cada problema. Podemos observar essas categorias no quadro 3 a seguir.

Sigla	Categorias
IO	Invariantes operatórios são os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação que indicam o reconhecimento pelo estudante dos componentes da situação. São conceitos e teoremas acionados no ato do desenvolvimento da situação.
NA	Antecipações são os efeitos esperados e eventuais etapas intermediárias que são postas em evidência mediante a situação a tratar, são os objetivos a alcançar.
RA	Regras de ação do tipo “se...então...” são regras que determinam a sequência das ações do aluno.
IN	Inferências são operações intelectuais que permitem determinar as regras e as antecipações a partir das informações e invariantes operatórios que o estudante dispõe.

Quadro 3 – Definição dos componentes que compõem os esquemas acionados

Fonte: Grings *et al.* (2008, p. 7-8)

Tem-se ainda que é importante diagnosticar em que momento há a necessidade de os estudantes realizarem filiações e rupturas dos esquemas e/ou de seus componentes.

Quando falamos de Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud já trás em sua definição as filiações e rupturas como sendo sua principal finalidade. Elas são comumente utilizadas para compreender as filiações e rupturas que ocorrem entre os conhecimentos tanto de crianças quanto de adolescentes, mas também podem ser utilizadas, a partir de modificações, para compreender a elaboração de filiações e rupturas entre conhecimentos dos adultos. Com os adultos, é necessário realizar modificações visto que o processo de filiações e rupturas está intrinsecamente relacionado com "hábitos e formas de pensamento adquiridos" (VERGNAUD, 1993, p.1).

A definição dessas duas categorias pode ser observada no quadro 4.

Siglas	Categorias
FI	Na categoria filiações, identifica-se, no discurso dos estudantes, a necessidade de buscar apoio em conhecimentos anteriores para o desenvolvimento do novo conhecimento.
RU	Na categoria rupturas, identifica-se na fala dos estudantes, a necessidade de romper com algum conhecimento anterior, uma vez que este conhecimento pode tornar-se obstáculo à nova conceitualização.

Quadro 4 – Definição das categorias filiações e rupturas

Fonte: Grings *et al.* (2008, p. 8)

Temos que as filiações e rupturas são complementares à sua maneira, quando relacionadas com o âmbito educacional. De acordo com as situações propostas pelo professor, o aluno irá em busca, de maneira inconsciente, conceitos conhecidos por ele capazes de construir esquemas e solucionar a situação enfrentada, fazendo com que assim ocorram as filiações. Já quando o estudante se depara com obstáculos e dificuldades nesse processo construtivo de esquemas, ele obriga-se a repensar as estratégias utilizadas, reformulá-las e, em alguns casos, se necessário, ir à busca de novos conceitos que ainda são desconhecidos por ele, fazendo com que assim, ocorram as rupturas.

Salienta-se que alguns cuidados precisam ser tomados quando se trabalha com jogos pedagógicos. Grando (2000) elenca cinco deles a serem tomados pelos professores: i) permitir aos estudantes um primeiro contato com o material do jogo para identificar seus elementos; ii) estabelecer com os alunos as regras do jogo e suas regularidades; iii) orientar os estudantes a jogar uma partida para compreender as regras; iv) intervir no jogo verbalmente, com o intuito de que os estudantes analisem suas jogadas e relacionem o jogo a conceitos matemáticos; e v) registrar os pontos e os procedimentos matemáticos desenvolvidos durante o jogo.

Leva-se em consideração, ainda, as etapas da sequência didática de Almeida e Carvalho (2016, p. 35): "*Etapa 1 – apresentação do jogo, exploração e formulação de questões; Etapa 2 – formulação de conjecturas, testes e reformulação; e Etapa 3 – justificação das conjecturas e avaliação do trabalho*".

2.2 Jogos matemáticos analisados pela Teoria dos Campos Conceituais

Para ilustrar como a Teoria dos Campos Conceituais pode embasar a metodologia do uso de jogos no ensino da Matemática, trazemos os trabalhos de Freitas *et al.* (2020), Costa e Raabe (2011), Bini (2008), Soppelsa e Fontana (2016), Barbosa e Magina (2014) e Junior e Régnier (2008).

Freitas *et al.* (2020) apresenta os jogos como uma ferramenta que possibilita ao professor visualizar a gama de esquemas e estratégias que os estudantes formulam e utilizam para a resolução de situações, às quais são expostos durante as jogadas. Segundo o autor,

> Os jogos também despertam aspectos sociais fundamentais para a formação do aluno e a convivência humana em sociedade, assim como aspectos emocionais e morais, quando empregados de maneira coerente e em grupo (FREITAS *et al.*, 2020, p. 61108).

Utilizando a Teoria dos Campos Conceituais como ferramenta de análise de esquemas que os alunos acionam durante partidas do jogo NIM, os autores analisaram as falas e os movimentos dos estudantes, categorizando-os de acordo com cada tipo de esquema acionado (regras de ação, inferências, antecipações, esquemas prontos e construídos, invariantes operatórios, filiações e rupturas).

Costa e Raabe (2011) trazem o jogo da bola de gude como ferramenta metodológica para que os alunos resolvam problemas propostos pelos pesquisadores. A Teoria dos Campos Conceituais entra nessa proposta como forma de investigar “as influências das categorias dos campos conceituais aditivos nas estratégias utilizadas por alunos” (COSTA; RAABE, 2011, p. 1238). Além da Teoria dos Campos Conceituais, os autores utilizaram os métodos clínicos de Piaget para analisar os cálculos realizados pelos alunos “acerca dos resultados das partidas” (COSTA; RAABE, 2011, p. 1236).

Barbosa e Magina (2014) apresentam os campos conceituais multiplicativos como aporte teórico para analisar o processo de aprendizagem dos alunos durante a utilização do Jogo de Mensagem, em que acontece a multiplicação de três números. Segundo os autores,

> No caso dos objetos matemáticos envolvidos no jogo de mensagem [...] eles compõem o que Vergnaud definiu como campo conceitual multiplicativo, incluindo nele os conceitos de multiplicação, divisão, decomposição em fatores primos, fração, razão, números racionais, função linear e n-linear, análise dimensional, espaço vetorial, entre outros (BARBOSA; MAGINA, 2014, p.14).

De forma semelhante a Freitas *et al.* (2020), Soppelsa e Fontana (2016) utilizam como metodologia o jogo matemático NIM, assim como apresentam como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais. A partir dos dados obtidos, os autores observaram que, além do conceito de divisão, os alunos também fizeram uso de outras operações

matemáticas básicas (divisão, multiplicação, soma e subtração) para atingir seus objetivos e resolver a atividade proposta pelos pesquisadores. Os autores consideram que:

> [o] Campo Conceitual mostra que os alunos constroem seu conhecimento à medida em que pensam sobre o assunto, vivenciam diferentes situações e quando são capazes de estabelecer relações com o conteúdo estudado (SOPPELSA; FONTANA, 2016, p. 1).

Junior e Acioly-Régnier (2008), por sua vez, trazem o Pega Varetas como jogo matemático pedagógico. A utilização de jogos, segundo os autores, proporciona a criatividade dos alunos, assim como desenvolve o sentido de pesquisa e exploração do desconhecido ao colocá-los em situações em que é necessário que se voltem para experiências e conhecimentos anteriores e/ou conhecimentos novos. A Teoria dos Campos Conceituais “constitui o suporte teórico para essa experimentação em sala de aula mas o conceito de mediação instrumental permeia toda a proposta didática e a an*á*lise da situação” (JUNIOR E ACIOLY-RÉGNIER, 2008, p. 1).

Bini (2008) apresenta um trabalho investigativo fundamentado teoricamente na Teoria dos Campos Conceituais. O objetivo da pesquisa foi “analisar se uma abordagem metodológica de ensino, priorizando situações interativas, pode contribuir para uma construção significativa do conhecimento no campo conceitual dos números inteiros” (BINI, 2008, p. 5). Denominando a utilização de jogos e desafios como atividades metodológicas interativas, a autora procurou propor aos alunos situações em que fosse possível o acionamento de invariantes operatórios, empregados como ferramentas capazes de “reconstruir esquemas satisfatórios para um determinado conceito” (BINI, 2008, p. 5).

3 | METODOLOGIA

Esta pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2019 e direcionada a um grupo de seis estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública no município de Caçapava do Sul.

A elaboração das etapas da sequência didática, utilizada para a aplicação da atividade, observou os cuidados básicos apontados por Grando (2000) ao fazer uso de jogos (GRANDO, 2000) e a sequência didática de Almeida e Carvalho (2016). A reunião dos elementos desses dois trabalhos resultou em três momentos de aplicação da atividade sobre o jogo NIM:

1º Divisão dos estudantes em duplas; entrega do material com as peças do jogo e apresentação de suas regras; familiarização com o jogo a partir da realização de algumas partidas.

2º Questionamentos por parte da pesquisadora referente às formas de se vencer o jogo; elaboração de hipóteses por parte dos estudantes.

3º Análise das hipóteses dos estudantes; apresentação da matemática envolvida no jogo; novas partidas utilizando o conhecimento matemático aprendido.

Como o intuito desta pesquisa era realizar a análise dos esquemas acionados pelos estudantes a partir da categorização realizada por Grings *et al.* (2008) (Quadros 3 e 4), optou-se por filmar os procedimentos dos alunos, de modo que pudessem ser analisadas não somente suas falas, mas, também, suas ações durante cada partida.

Para nomear os estudantes sem expor suas identidades, utilizou-se nesta pesquisa a letra inicial da palavra estudante seguida de um número natural (E1, E2, E3, E4, E5 e E6). Já a pesquisadora foi identificada pela letra "P".

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

As partidas jogadas pelos estudantes foram transcritas e analisadas de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais. No quadro 5, é possível observar alguns trechos em que houve maior número de acionamentos das categorias de análise. Foram utilizadas as siglas apresentadas nos quadros 2 e 3 para análise das falas e movimentos dos estudantes.

Categoria de Análise	Transcrição
[...]	
RA **IN** **EP** **FI**	P – *Quantas partidas vocês já jogaram?* E1 – *Quatro partidas.* P – *E quantas você ganhou?* E2 – *Ganhei as quatro.* P – *Por que você acha que ganhou as quatro partidas?* E6 – *Por causa do raciocínio.* P – *Mas que tipo de raciocínio? Você usou alguma estratégia?* E6 – *Por exemplo, se tem sete palitos na mesa, aí tu tira* (sic) *dois e deixa cinco. Aí, qualquer que eu tire, eu ganho.* P – *Mas e se eu tirar só um desses sete?* E6 – *Daí tu ganha.*
[...]	
IO **NA** **EC** **RU**	P – *O que aconteceu?* E3 – *Quem começou jogando perdeu.* P – *E o que acontece se retirar de quatro em quatro?* E5 – *Quem começou ganhou.* P – *E por que isso aconteceu? O que pode explicar isso?* E4 – *28 dividido por quatro.* P – *E quanto que dá essa divisão?*
[...]	

EP **FI** **IO**	P – *Então agora pensem na regra que escrevemos lá no começo, onde a retirada mínima é de um palito e a máxima é de quatro palitos, e façam as retiradas dos quatro grupos com sete palitos que estão na mesa. O que aconteceu?* E6 – *Se ele retirar uma quantidade diferente de quatro, não funciona retirar só de quatro em quatro, porque vou ter que retirar uma quantia diferente para ganhar.*

Quadro 5 – Categorização a partir da análise das falas dos estudantes.

Fonte: as autoras

Podemos observar no quadro 5 que houve o acionamento de todas as categorias descritas na Teoria dos Campos Conceituais, sendo que algumas foram acionadas mais de uma vez por diferentes estudantes, isto em apenas alguns trechos da transcrição apresentados.

Considerando todas as falas e os movimentos realizados pelos estudantes durante o tempo de aplicação do jogo, foi possível observar que as categorias mais acionadas por eles foram os Invariantes Operatórios, e os menos acionados foram os Esquemas Construídos e as Antecipações. Durante toda a atividade e somando todas as categorias acionadas, chegamos a um total de 32 acionamentos de categorias.

O fato de os estudantes terem realizado o acionamento de todas as categorias, mostra que, quando a atividade é bem elaborada e aplicada, ela faz com que os alunos tenham que recorrer aos conhecimentos já construídos por eles (esquemas prontos, esquemas construídos e filiações), e em algumas vezes, quando bem estimulados, tenham que realizar a ruptura desses conhecimentos e irem à busca de novos, visto que estes já não satisfazem mais as suas necessidades.

Pode-se observar ainda, a maneira como esses acionamentos vão ocorrendo em todas as suas fases. Na pesquisa realizada, ocorreram o acionamento das categorias: regras de ação, invariantes operatórios, inferências e antecipações.

5 I CONCLUSÕES

A pesquisa, mesmo tendo sida realizada com um número restrito de estudantes, pode ser aplicada a um público maior. Ao realizar a investigação, o professor e/ou pesquisador pode utilizar das ferramentas e estratégias que mais se adaptem com seu público-alvo. Mostra ainda que uma atividade realizada com um jogo, usado com fins pedagógicos, contribui para que os estudantes acionem esquemas prontos e esquemas construídos, além de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação necessários para resolver o desafio que a atividade impõe.

A Teoria dos Campos Conceituais possibilita observar o modo como cada aluno constrói esquemas ao resolver situações em que necessitam resolver um problema conhecimento, o que contribui para os professores elaborarem suas atividades e estratégias

de ensino de maneira que os estudantes tenham um maior aproveitamento de seus estudos. A Teoria dos Campos Conceituais também possibilita observar e analisar se os estudantes reconhecem, entendem e sabem utilizar os elementos simbólicos da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Beatriz Ignacio; CARVALHO, Rafaela Barcelos de. **A matemática do jogo do Nim em uma abordagem investigativa**. 2016. 79 f. Monografia (Licenciatura em Matemática)-Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes, RJ, 2016.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. MAGINA, Sandra M. P. Construindo significado para expressões numéricas multiplicativas a partir do jogo de mensagem. **Zetetiké** – FE/ Unicamp, v. 22, n. 41, jan/jun 2014. Disponível em < https://www.researchgate.net/publication/322377728_Construindo_Significado_para_expressoes_numericas_multiplicativas_a_partir_do_jogo_de_mensage>. Acessado em 29 mar. 2020.

BINI, Márcia Bárbara. **Atividades interativas como geradoras de situações no campo conceitual da matemática.** Dissertação. Programa de Pós-Graduação em educação em Ciências e Matemática, PUCRS. Porto Alegre, RS, 2008. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3305>. Acesso em: 25 mar. 2020.

BOUTON, Charles Leonard. Nim, a game with a complete mathematical theory. **The Annals of Mathematics**. v. 3, n. 1, p. 35-39. Harvard University, Cambridge, Massachusetts, 1901- 1902.

BRASIL, Ministério da Educação. **Compromisso Nacional pela Educação Básica.** MEC, CONSED, UNDIME. jul. 2019. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/images/11.07.2019_Apresentacao-ed-basica.pdf>. Acesso em 28 nov. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.** Brasília: MEC/SEF. 142 p. 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acessado em 25 nov. 2020.

COSTA, Silvia Janine Rodrigues da. RAABE, André Luis Alice. Aprendizagem Matemática do Cotidiano: Estratégias de ação no jogo Bola de Gude**. Anais do XXII SBIE – XVII WIE**. Aracaju, nov. 2011. Disponível em: < https://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/1964/1723 >. Acessado em: 16 mar. 2020.

FREITAS, Ivana de Oliveira. OLIVEIRA, Luana de Freitas. HARTMANN, Ângela Maria. Utilização dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta de análise: O jogo do NIM e o desempenho escolar em Matemática. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 8, p. 61104-61124. Curitiba, ago. 2020. ISSN 2525-8761

GRANDO, Regia Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. Tese (doutorado)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

GRINGS, Edi Terezinha de Oliveira; CABALLERO, Concesa; MOREIRA, Marco Antonio. Uma proposta didática para abordar o conceito de temperatura a partir de situações, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia**. vol. 1, n. 1, jan./abr. 2008. Disponível em: <http://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/221/213>. Acessado em: 19 mar. 2018.

JUNIOR, Clovis Gomes da Silva. ACIOLY-RÉGNIER, Nadja. Jogos como situação para aprendizagem segundo a teoria dos campos conceituais: o caso do pega-varetas. **2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Recife, PE, 28 jul.-1 ago. 2008. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/266854133_JOGOS_COMO_SITUACAO_PARA_APRENDIZAGEM_SEGUNDO_A_TEORIA_DOS_CAMPOS_CONCEITUAIS_O_CASO_DO_PEGA-VARETAS>. Acessado em 16 abr. 2020

MOREIRA, Marco Antonio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vegnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nessa área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, p. 7-29. Porto Alegre, RS, 2002. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequen>. Acesso em: 10 mar. 2020.

NASCIMENTO, Henrique Alexandre do. **A utilização do Jogo do Nim para estimular o cálculo mental**. 2016. Monografia (Especialista em Ensino de Matemática)-Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, RN, 2016.

SOPPELSA, Janete Jacinta Carrer. FONTANA, Arrigo. Superando as dificuldades com a divisão através da utilização de jogos. **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática** – Relato de experiência. São Paulo, SP, 13-16 jul. 2016. Disponível em <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7016_3159_ID.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2020.

VERGNAUD, Gèrard. Multiplicative structures. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). **Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161. 1988.

VERGNAUD, Gèrard. **La théorie dês champs conceptuels.** Recherches em Didactique dês Mathématiques, v. 10, n. 23. p. 133-70, 1990.

VERGNAUD, Gèrard. Teoria dos Campos Conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1° Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, p. 1-26. 1993. Disponível em: <http://odin.mat.ufrgs.br/usuarios/paula/Teoria_do_Campo_Conceitual_G.Vergnaud.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2018.

VERGNAUD, Gèrard. Long term and short term in mathematics learning (engl.). O longo e o curto prazo na aprendizagem da Matemática (port.). **Educar em Revista**, Curitiba, PR. n. especial 1/2011, p. 15-27. Curitiba: UFPR, 2011.

VIEIRA, Iloni Hericks; SANTOS, Clodogil Fabiano Ribeiro dos. Jogo do Nim: o lúdico na formação de conceitos básicos de matemática em alunos de 6º ano nas salas de apoio. **O professor PDE e os desafios da Escola Pública Paranaense**. v. 1. Secretaria de Educação, Paraná, 2012.

CAPÍTULO 24

V TORNEIO DE JOGOS MATEMÁTICOS COMO FERRAMENTA DE INCLUSÃO ESCOLAR

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 15/01/2021

Ricardo Gomes Assunção
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/2076041948976443

Vinícius Vieira da Silva Dutra
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/8009904131505328

Ana Carolina da Silva Manoel
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/1434783277489609

Anna Júlia Martins Melo
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/9810687098359894

Marcos Victor Magalhães da Silva
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/5475133547817895

Vinícius Silva Lima
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/7582202603608494

Westher Manricky Bernardes Fortunato
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/8910395588042646

Eliane Fonseca Campos Mota
Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí
Urutaí - Goiás
http://lattes.cnpq.br/7341314548881070

RESUMO: O Torneio de Jogos Matemáticos é um projeto de extensão promovido pelo Curso de Licenciatura em Matemática do IF Goiano Campus Urutaí em parceria com as escolas do ensino básico. A experiência vivenciada no desenvolvimento do IV Torneio de Jogos Matemáticos, realizado em 2018, foi a referência para o planejamento da inclusão de alunos com Necessidades Educacionais Especiais (NEE) para o Torneio de 2019. A motivação foi a participação de uma aluna com deficiência visual total na etapa de aplicação das oficinas. Naquela ocasião, a equipe executora não estava preparada para aquela situação. A equipe se organizou e possibilitou a participação da aluna. Portanto, o objetivo aqui proposto é descrever as adaptações realizadas para a inclusão de alunos com deficiência visual, bem como, relatar a experiência vivenciada no desenvolvimento do V Torneio de Jogos Matemáticos de 2019. A equipe executora selecionou e confeccionou 05 jogos (Aboyne, Campanha, Y, Dara, Quarto), realizou as adaptações em cada exemplar (tabuleiros e peças), nas regras dos jogos e nas regras do Torneio para a participação de alunos com deficiência visual. No desenvolvimento do V Torneio de Jogos Matemáticos (2019), a equipe executora se deparou com uma situação nova, a participação de um aluno com deficiência física (com má formação nos braços). Esta limitação

física o impedia de mover as peças dos jogos. Para a inclusão deste aluno no Torneio, a equipe enumerou as casas dos tabuleiros em cada exemplar dos jogos e um membro da equipe foi destinado para movimentação das peças. O aluno pensava as estratégias e comunicava ao membro da equipe qual peça deveria ser movida e para qual casa. O trabalho em equipe foi fundamental para o sucesso do Torneio.
PALAVRAS-CHAVE: Torneio de Jogos Matemáticos, Adaptações, Alunos com Necessidades Educacionais Especiais.

V TOURNAMENT OF MATHEMATICAL GAMES AS A TOOL FOR SCHOOL INCLUSION

ABSTRACT: The Mathematical Games Tournament is an extension project promoted by the Mathematical Degree Course of the IF Goiano Campus Urutaí in partnership with elementary schools. The experience experienced in the development of the IV Mathematical Games Tournament, held in 2018, was the reference for planning the inclusion of students with Special Educational Needs (SEN) for the 2019 Tournament. The motivation was the participation of a student with total visual impairment in the application stage of the workshops. At that time, the execution team was not prepared for that situation. The team organized itself and made it possible for the student to participate. Therefore, the objective proposed here is to describe the adaptations made for the inclusion of visually impaired students, as well as to report on the experience lived during the development of the V Mathematical Games Tournament of 2019. The team selected and made 05 games (Aboyne, Campanha, Y, Dara, Quarto), made the adaptations in each copy (boards and pieces), in the game rules and in the Tournament rules for the participation of students with visual impairment. In the development of the V Math Games Tournament (2019), the executing team was faced with a new situation, the participation of a student with physical disability (with poor training in the arms). This physical limitation prevented him from moving the game pieces. For the inclusion of this student in the Tournament, the team enumerated the board houses in each copy of the games and a team member was assigned to move the pieces. The student thought about strategies and communicated to the team member which piece should be moved and to which square. Teamwork was fundamental to the success of the tournament.
KEYWORDS: Math Games Tournament, Adaptations, Students with Special Educational Needs.

1 I INTRODUÇÃO

Este relato tem como tema principal os jogos para o desenvolvimento de habilidades matemáticas na educação, com possibilidades de aplicação na educação inclusiva, que foi uma demanda que surgiu no desenvolvimento do IV Torneio de Jogos Matemáticos, que desde 2015 trabalha com jogos de tabuleiros voltados para a educação básica de Urutaí e região. “A educação por meio de jogos tem-se tornado, nas últimas décadas, uma alternativa metodológica bastante pesquisada, utilizada e abordada de variados aspectos” (ALVES, 2020, p. 15). Um dos aspectos percebidos nesses anos é a possibilidade e a necessidade de tornar os jogos acessíveis aos alunos com algum grau de deficiência visual.

Se bem planejados e com objetivos bem definidos, o uso de jogos podem ser uma estratégia de ensino eficaz para a aprendizagem da Matemática ou desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas, dentre outras habilidades, sendo elas: o raciocínio lógico dedutivo, o senso investigativo e a resolução de problemas, pois o aluno utilizará de estratégias matemáticas para vencer seu oponente no jogo, além de promover o respeito às regras e trabalho em equipe. Segundo Smole (et al, 2007), "o uso de jogos favorece aos alunos nos quesitos de linguagem, raciocínio lógico e no convívio entre os alunos, uma vez que o aluno participante dos jogos tem a possibilidade de adquirir confiança e raciocínio crítico" (p. 9). De acordo com Abrantes,

> O jogo possui vários objetivos pedagógicos como: trabalhar a ansiedade dos alunos por meio de atividades que exigem concentração; rever limite, pois é pelos jogos que o aluno se enquadra em regras, reagindo com suas emoções para aprender a ganhar e perder, aprendendo inclusive a respeitar e ser respeitado; proporcionar confiança em si e nos outros; estimular a autoestima; confeccionar jogos, fazendo que a criança tenha oportunidade de errar, acertar, construir, criar, copiar, desenvolver planos aumentando sua autoestima, acreditando que é capaz de fazer muitas coisas para si; desenvolver a autonomia, proporcionando ao aluno a oportunidade de responsabilizar-se por suas escolhas e atos; ampliar o raciocínio lógico, exigindo planejamento e estratégias para raciocinar (ABRANTES, 2010, p. 3).

Ao optar pelos jogos como estratégia de ensino, é importante que todos os alunos sejam envolvidos no processo, sem exceção. É nesse contexto que o projeto de extensão V Torneio de Jogos Matemáticos, realizado em 2019, buscou-se inserir.

A motivação de realizar um Torneio que incluísse os alunos com Necessidades Educacionais Especiais (NEE) surgiu de uma experiência vivenciada em 2018, no IV Torneio de Jogos Matemáticos, onde no desenvolvimento de uma das etapas em uma das escolas participantes, a equipe executora do projeto se deparou com uma aluna com deficiência visual total em uma das turmas. A participação dos alunos não era obrigatória e a referida aluna optou por participar do projeto. Contudo, os jogos como foram confeccionados, não supriam as necessidades da aluna, bem como o regulamento do Torneio. Na verdade, os jogos foram construídos desconsiderando a possibilidade de haver alunos NEE nas escolas participantes do projeto.

Essa situação nova, que até então não havia acontecido nas edições anteriores do Torneio, tornou-se um desafio. Como incluir a aluna no Torneio? A inclusão de alunos com NEE na escola é uma temática que vem sendo discutida há anos pela comunidade educacional. Os avanços nas políticas públicas têm assegurado, cada vez mais, o direito à educação para todos os alunos.

Segundo Stainback (1999 *apud* COELHO, 2010, p. 16), "[...] a Educação Inclusiva se apoia em uma visão ampliada do processo de ensino e de aprendizagem. Parte do princípio de que todos podem aprender e de que suas diferenças devem ser respeitadas

e trabalhadas", ou seja, incluir não é colocar numa mesma sala de aula alunos NEE e alunos ditos "normais", mas é dar condições de permanência e de aprendizagem mediante o contorno das limitações de todos os estudantes. É um processo que exige dedicação de toda a comunidade escolar, embora exista um movimento contra a educação inclusiva do atual governo brasileiro. Em conversa recente com alguns apoiadores sobre isso, o presidente da república disse que quando se coloca, numa mesma sala de aula, alunos bons e outros atrasados, acontece um nivelamento por baixo, onde a tendência é que todos irão na esteira daquele com menor inteligência[1].

A opinião da equipe é contrária a essa, e por isso, a proposta de relatar a experiência e o desafio na inclusão da aluna com deficiência visual no Torneio, momento que inicialmente se apresentou problemático, mas, sempre acreditando ser possível de fazê-lo. Diante daquela situação, foram improvisadas adaptações tanto nos tabuleiros e peças, quanto nas regras dos jogos e nas regras do Torneio. Na ocasião, os traços e limitações dos tabuleiros foram demarcados com estilete e as pecinhas foram adaptadas quanto ao formato para que a aluna pudesse, por meio do tato, perceber as casas dos tabuleiros, as suas jogadas e as jogadas do adversário. O final da segunda etapa do Torneio revelou que a aluna compreendeu as regras de todos os jogos durante o treinamento, contudo, ela não quis participar das competições pelo fato de ter acontecido em horário de aula.

A experiência vivenciada em 2018 fez com que a equipe executora repensasse o projeto para 2019, tornando-o mais inclusivo. Portanto, o objetivo aqui proposto é descrever as adaptações realizadas para a inclusão de alunos com deficiência visual, bem como, relatar a experiência vivenciada no desenvolvimento do V Torneio de Jogos Matemáticos de 2019.

Antes de iniciar o relato, faz-se necessário apontar algumas discussões acerca da inclusão e a disciplina de Matemática, disciplina esta considerada por muitos como difícil, para poucos, só para os inteligentes, para os gênios (ou seja, se já é uma disciplina discursivamente excludente, onde os alunos ditos "normais" já têm dificuldades, imagina então para os alunos NEE, que têm de enfrentar outras dificuldades para além das corriqueiras da disciplina).

Rosa (2017), na sua pesquisa de doutorado, conversou com alguns alunos (e suas respectivas mães) que têm algum grau de deficiência visual, sobre os desafios e as dificuldades de realizar os estudos nas escolas de educação básica, com certo interesse na disciplina de Matemática. Dentre os apontamentos da pesquisa, o fato de a disciplina de Matemática ser muito visual, principalmente na parte da geometria e dos gráficos, isso demanda algumas adaptações para a inclusão de alunos com algum grau de deficiência visual. Ainda com Rosa (2017, p. 221), "há a necessidade de transformar os conceitos abstratos e demasiadamente visual que estão em duas dimensões nos livros, por exemplo,

1. https://brasil.estadao.com.br/blogs/vencer-limites/bolsonaro-afirma-que-educacao-inclusiva-nivela-por-baixo/. Acesso em: 10/01/2021.

em representações táteis do objeto matemático para que sejam criadas imagens mentais". Isto é, trabalhar com sólidos geométricos, gráficos e figuras em alto relevo, representados por papelão ou fósforo, por exemplo, são possibilidades simples e que possibilita a inclusão, uma vez que "a criação de objetos matemáticos táteis visa uma aprendizagem significativa sem excluir os alunos que têm dificuldade de visualizar, mesmo quando o professor desenha no quadro" (id., p. 222). Sobre as dificuldades da parte mais abstrata da Matemática, "isso não acontece na aprendizagem de aritmética ou álgebra, por exemplo em que os alunos, em geral, fazem cálculos mentais e/ou no soroban[2], atingindo os objetivos esperados ao final da aula" (id. 220).

Outros aspectos evidenciados pela pesquisa da autora foram: a dificuldade dos estudantes com a escrita e a simbologia matemáticas em braille[3]; a necessidade de adequação da linguagem dos professores, uma vez que o entendimento visual de alguns conceitos também depende da linguagem adequada do professor (como exemplo, uma fala de um dos estudantes entrevistados sobre uma aula, onde o professor diz: 'passa para lá, corta aqui' (id., p. 221), e ele (o estudante) comenta que não consegue entender o que o professor quis dizer com aquilo); e, por fim, os professores precisam adotar novas práticas pedagógicas, abandonando as aulas de memorização, pois, não ajuda na compreensão do conteúdo matemático, que é adquirido quando o professor mostra a relação dos conteúdos com a vivência dos estudantes.

É importante que se diga que os objetos matemáticos táteis (sejam materiais didáticos, manipuláveis ou adaptados) e as tecnologias assistivas (como um leitor de texto) beneficiam não somente os alunos com algum grau de deficiência visual, mas os videntes também, uma vez que todos os alunos poderão utilizá-los para a compreensão da disciplina de Matemática, que têm um dos maiores índices de reprovação na educação básica.

Com esse entendimento é que as adaptações no V Torneio de Jogos Matemáticos foram pensadas, a fim de incluir todos os alunos que tinham interesse em participar do projeto e para somar aos esforços que estão sendo realizados para tornar a Matemática uma disciplina mais inclusiva, que, dentre as várias possibilidades, passa pela reformulação dos cursos formadores de professores de Matemática, para melhor prepará-los para trabalhar com as diversidades e diferenças de uma sala de aula, e pela consolidação das políticas públicas voltadas para o público NEE, como a garantia de pessoal especializado para apoiar os professores em sala de aula.

2 | DESENVOLVIMENTO

O Torneio de jogos matemáticos é um projeto de extensão desenvolvido pelos alunos com um professor do Curso de Licenciatura em Matemática do IF Goiano – Campus Urutaí. Visa estimular as habilidades lógico-matemáticas, dentre outras, de alunos do ensino médio das escolas situadas nas cidades de Urutaí, Pires do Rio e Ipameri, todas em Goiás.

2. Ábaco adaptado, desenvolvido para pessoas com deficiência visual fazerem cálculos.

3. Sistema de escrita tátil utilizado por pessoas com algum grau de deficiência visual.

O Torneio de Jogos Matemáticos estava na sua quinta edição. Foi executado no período de março a novembro de 2019 e desenvolvido em três etapas: preparação, aplicação das oficinas e o Torneio.

Na etapa de *preparação* aconteceu a seleção de cinco jogos de tabuleiros. Foram eles: o Aboyne, Campanha, Y, Dara e Quarto (Figura 1).
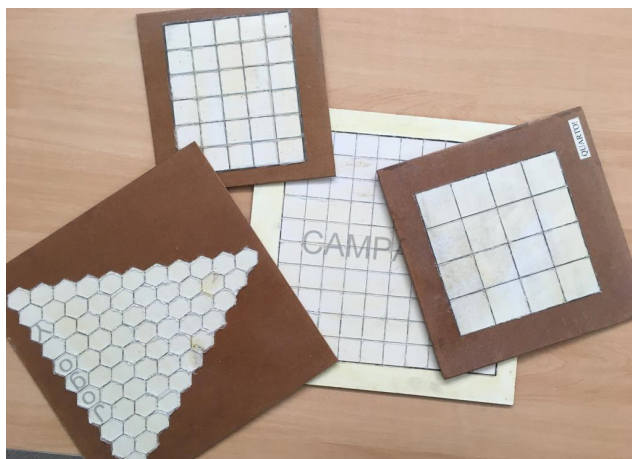
Figura 1: Tabuleiros do V Torneio.

Fonte: arquivo pessoal.

KLLISYS (2017), *NETO* (2004), *ZASLAVSKY* (2020) foram as referências utilizadas para a seleção dos jogos.

Para um melhor aproveitamento dos tabuleiros, utilizou-se os dois lados para jogos diferentes, por exemplo, um tabuleiro está com o jogo Aboyne de um lado e o jogo Quarto do outro lado. Aproveitou-se um dos tabuleiros do Torneio do ano anterior para o jogo Dara. Todos eles são jogados em duplas.

Há regras específicas que são válidas para todos os jogos, tais como: o jogo sempre se inicia na sorte, ou seja, no par ou ímpar; cada jogador tem um tempo máximo de 30 segundos para realizar a sua jogada, e tocou em alguma peça é obrigado a jogá-la. Para os alunos com deficiência visual, essas duas últimas regras citadas não são válidas. Cada jogador escolhe a cor das suas peças, independente do jogo, e o jogador faz uma jogada por vez.

Para o V Torneio de Jogos Matemáticos, foram adaptados um exemplar de um tabuleiro de cada jogo e suas peças para a inclusão de alunos com deficiência visual. A seguir será detalhado, resumidamente, as regras dos cinco jogos do V Torneio de Jogos Matemáticos e as adaptações realizadas em cada um deles.

O **jogo Aboyne** é um jogo de captura. O tabuleiro é composto por casas conectadas, que juntas, formam um hexágono. São distribuídas 9 peças para cada jogador. A cor das peças de um jogador é diferente da cor das peças do adversário.

Em cada rodada um jogador pode mover uma peça para uma casa adjacente, desde que ela esteja vazia e não bloqueada. Se uma peça ficar ao lado de uma peça de outra cor, ambas estarão bloqueadas. Para que uma peça não bloqueada possa fazer capturas, ela precisa saltar uma linha de peças da sua cor, desde que esteja em um dos extremos, movendo a peça para o extremo oposto, que se estiver ocupado por uma peça inimiga, essa peça é capturada. As peças pretas ganham se moverem uma peça para o hexágono “e1” e as brancas ganham se moverem uma peça para o hexágono “e9”. Um jogador perde o jogo se, no momento de fazer sua jogada, todas as suas peças estiverem bloqueadas.

Para a inclusão dos alunos com deficiência visual, as seguintes adaptações foram realizadas no jogo Aboyne: os traços no tabuleiro foram colocados em alto relevo usando-se cola quente e o formato das peças foi modificado. Ao invés de cores preta e branca, as peças adquiriram dois formatos: circulares e quadradas. Pela forma, o aluno perceberia as suas peças e as peças do adversário. A figura 2 ilustra a adaptação feita no tabuleiro. A cola quente foi utilizada para todos os tabuleiros.

Figura 2: Tabuleiro Aboyne adaptado.

Fonte: arquivo pessoal.

O **jogo Y** é territorial, de ocupação de espaço, onde inicia-se com o tabuleiro vazio. O tabuleiro do jogo Y tem formato triangular, cujas casas são hexagonais. Para jogá-lo são necessárias 33 peças. As peças de um jogador têm a cor diferente das peças do outro jogador, porém, de mesmo formato. Foram utilizados botões de camisa como peças do jogo.

Em cada rodada, cada jogador coloca uma peça da sua cor em uma casa vazia de maneira alternada. Para que haja equilíbrio no jogo, depois da primeira jogada, o segundo jogador pode trocar de cor se assim o desejar (ficando com a peça jogada e passando a vez ao adversário). Vence o jogador que conseguir formar um grupo de peças que ligue os três cantos do tabuleiro.

O tabuleiro foi adaptado com as linhas tracejadas em alto relevo (cola quente) e as peças possuindo formatos diferentes, tais como: quadrangular e circular. A figura 3 mostra o tabuleiro do jogo Y em alto relevo.
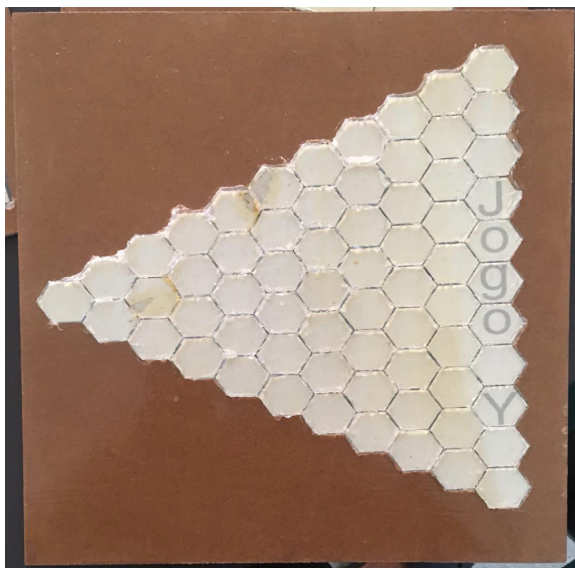
Figura 3: Tabuleiro do jogo Y adaptado.

Fonte: arquivo pessoal.

O **jogo Quarto** é um jogo de trilha, onde seu tabuleiro tem formato quadrangular possuindo 4 linhas e 4 colunas. Cada jogador recebe 16 peças únicas, sendo cada peça possuindo quatro atributos: formato quadrangular ou circular, preta ou branca, pequena ou grande, com buraco (oca) ou sem buraco (maciça).

O jogo inicia-se com o tabuleiro vazio. Um jogador recebe 08 peças pretas, e o outro, 08 peças brancas. O jogador, na sua vez, escolhe a peça que o seu adversário terá

de colocar no tabuleiro. E isso acontece de forma alternada entre os jogadores. Vence o jogador que, ao colocar a peça, consegue formar uma linha, coluna ou diagonal em que todas as peças tenham uma característica comum (todas pequenas, todas redondas, etc). Nesse jogo pode haver empate e, caso aconteça, inicia-se novamente a partida.

Para as adaptações deste jogo utilizou-se cola quente tanto para o tabuleiro quanto para as peças brancas, tornando-os em alto relevo. Desta forma, foi possível diferenciar as peças brancas das peças pretas (que permaneceram originais). A figura 4 mostra a adaptação realizada no tabuleiro do jogo Quarto.

Figura 4: Tabuleiro do jogo Quarto adaptado.

Fonte: arquivo pessoal.

O **jogo Dara** é um jogo de trilha e captura, onde o tabuleiro tem um formato quadrangular, possuindo 6 linhas e 5 colunas. As peças possuem duas cores diferentes, sendo 12 peças de mesma para cada jogador.

O jogo inicia-se com o tabuleiro vazio. Os dois jogadores, alternadamente, colocam uma peça em qualquer quadrado vazio até finalizarem as 24 peças. A movimentação das peças pode ser feita para qualquer espaço vazio adjacente, com exceção da casa à diagonal. Nesse jogo não é permitido saltar por cima de uma peça, apenas movimentar para as casas adjacentes vazias. A captura do jogo ocorre quando um jogador completar uma fila, daí, ele pode remover do tabuleiro uma das peças do adversário. Essa fila só pode ser feita na horizontal e vertical. Existem duas restrições no jogo, onde um jogador não

pode ter mais de três peças em uma linha contínua, em nenhum momento do jogo, e não é permitido fazer a mesma linha durante duas rodadas. O jogo termina quando um jogador não conseguir formar uma fila. Neste caso, o adversário é o vencedor.

As adaptações aconteceram com as linhas tracejadas do tabuleiro em alto relevo (cola quente), e as de peças se diferenciando através do formato: circular e quadrangular. A Figura 5 mostra como foi a adaptação do tabuleiro do jogo Dara.

Figura 5: Tabuleiro do jogo Dara adaptado.

Fonte: arquivo pessoal.

O **jogo Campanha** é um jogo de trilha. Seu tabuleiro possui um formato quadrangular, com 10 linhas e 10 colunas. As peças possuem duas cores: brancas e pretas. Para cada cor há uma peça que representa o cavalo e que se diferencia das outras 40 peças com formatos circulares.

O vencedor do par ou ímpar, inicia o jogo, mas é o adversário quem escolhe a cor que o vencedor iniciará a jogada. O vencedor coloca o cavalo em um quadrado vazio, depois é a vez do adversário fazer a mesma jogada. Em cada rodada, cada jogador movimenta o respectivo cavalo colocando uma peça da sua cor no quadrado de onde o cavalo saiu. A movimentação do cavalo acontece como no xadrez (em "L"). Vence o jogador que obtiver um grupo de cinco peças da sua cor na mesma linha, excluindo o cavalo, ou conseguindo bloquear o cavalo adversário.

As adaptações aconteceram nas linhas tracejadas do tabuleiro em alto relevo (cola quente) e nas peças. Quanto às peças, um dos cavalos foi substituído pelo cavalo do jogo de xadrez (em 3D), enquanto o outro cavalo permaneceu como confeccionado em material EVA (em 2D). As demais peças se diferenciaram pelo formato circular e quadrangular. A figura 6 mostra como o jogo Campanha foi adaptado.

Figura 6: Tabuleiro do jogo Campanha adaptado.

Fonte: arquivo pessoal.

A equipe executora confeccionou os jogos e suas peças, treinou as jogadas para compreensão das regras, elaborou o manual com as regras dos jogos e o regulamento do Torneio.

Na segunda etapa, aconteceu a *aplicação das oficinas*. Esta etapa consiste no treinamento dos jogos pelos alunos das escolas de ensino básico participantes do projeto. É o primeiro contato da equipe executora com os alunos. A participação dos alunos não é obrigatória. É feito o treinamento dos jogos para a compreensão das regras e um exemplar de cada tabuleiro fica disponível na escola para que os alunos possam realizar os treinamentos e se prepararem para o Torneio. Os alunos interessados se inscrevem e no dia e horário marcado comparecem ao local para participarem do Torneio.

E por fim, a terceira etapa, que é o *Torneio* em si. Participam desta etapa somente os alunos que participaram do período preparatório e se inscreveram para o Torneio. Esta etapa é dividida em duas fases: a primeira fase é eliminatória e classificatória. Apenas um

aluno é classificado para a próxima fase. Cada aluno vencedor da sua cidade e escola recebe uma medalha e se torna o campeão local. Os três alunos classificados vão para a fase final (segunda fase), onde acontece a melhor de três entre os três campeões das cidades de Urutaí, Pires do Rio e Ipameri. Em 2019, esta fase foi realizada no IF Goiano Campus Urutaí.

3 | EXPERIÊNCIA VIVENCIADA NO V TORNEIO DE JOGOS MATEMÁTICOS

A primeira etapa do Torneio exigiu da equipe um cuidado maior na seleção dos jogos, pois, foi preciso observar as possibilidades de adaptações para os alunos com deficiência visual. Para cada jogo selecionado, a equipe executora estudou como fazer as adaptações no tabuleiro e nas peças. Os tabuleiros foram confeccionados em alto relevo e as peças adquiriram formatos diferentes. Foi um período de muitas ideias, discussões e opiniões até se chegar à versão final dos jogos adaptados. Esse processo, fez com que a equipe se colocasse no lugar do aluno com deficiência visual e imaginasse as ocorrências possíveis e as intervenções necessárias. Portanto, foi preciso prever situações problemáticas que poderiam surgir e se preparar para elas, fazendo as adequações também nas regras do Torneio.

A segunda etapa do V Torneio de Jogos Matemáticos surpreendeu a equipe executora novamente, assim como no Torneio do ano anterior. Desta vez, não havia alunos com deficiência visual, mas, em uma das escolas participantes havia em uma das turmas, um aluno com deficiência física. A sua limitação estava nos braços, má formação. Ele manifestou interesse em participar do Torneio, mas, devido sua limitação física, não conseguia mover as peças no tabuleiro. Na primeira etapa do Torneio, a equipe executora havia se preparado para atender alunos com deficiência visual e não com limitações físicas. A equipe executora precisou se organizar rapidamente, no dia do treinamento, para incluir este aluno. Tomou as seguintes decisões: disponibilizar alguém da equipe para mover as peças seguindo as instruções do aluno e para posicionar as peças nas casas dos tabuleiros, decidiu enumerá-las. Um exemplar de cada jogo teve o tabuleiro numerado manualmente, com um canetão azul. Não foi preciso realizar adaptações nas peças. A Figura 7 mostra os tabuleiros do V Torneio adaptados para o aluno com deficiência motora.

Figura 7: Tabuleiros adaptados para alunos com limitação física nos braços.

Fonte: arquivo pessoal.

Como os jogos eram disputados em duplas, na sua vez de jogar, o aluno com limitação motora nos braços analisava suas jogadas e solicitava ao membro da equipe executora para posicionar a peça na casa com a numeração escolhida por ele. O jogo Quarto possuía uma especificidade a mais, pois além de falar a numeração da casa para o membro da equipe executora, o aluno também tinha que escolher uma das peças, visto que todas eram diferentes entre si. Após o término da oficina, a equipe executora disponibilizou a ficha de inscrição e um exemplar de cada um dos tabuleiros na escola.

Para a terceira e última etapa, que é a execução do Torneio de jogos, a equipe executora revisou as regras dos jogos e o regulamento para observar a necessidade de adaptação para o aluno com deficiência física. Concluiu-se que não era necessário, pois, um membro da equipe executora movimentava as peças para o referido aluno. Este aluno se inscreveu e participou do Torneio, contudo, foi eliminado na primeira rodada.

Na cidade de Ipameri não houve alunos inscritos, então, a escola participante foi eliminada automaticamente. A decisão estaria entre as escolas participantes das cidades de Pires do Rio e Urutaí. No dia e horário determinado para a realização do Torneio, a equipe executora relembrou as regras de todos os jogos e as regras do Torneio. Em seguida foi feito um sorteio para definir as duplas que iriam jogar, sendo o vencedor de cada chave quem vencesse primeiro três jogos dos cincos.

Definido o vencedor das duas cidades, a final do Torneio aconteceria no Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí. Entretanto, não houve a final, pois o vencedor da cidade

de Urutaí não se interessou em participar, declarando assim, o aluno de Pires do Rio o vencedor do V Torneio de Jogos Matemáticos.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da equipe executora se preparar para a inclusão de alunos com deficiência visual para o desenvolvimento do V Torneio de Jogos Matemáticos, não houve a participação de alunos com este perfil em nenhuma das cidades. Contudo, a equipe foi surpreendida com um aluno com deficiência física que o impedia de mover as peças. Para este aluno, a equipe executora não havia se preparado. Resiliência foi a palavra que definiu o comportamento da equipe. Rapidamente se organizou e possibilitou a participação deste aluno.

As experiências vivenciadas em 2018 e agora em 2019 deixam a lição de que é preciso pensar nos mais variados perfis de alunos NEE para o planejamento das próximas edições do Torneio. Experiências como estas preparam os discentes do Curso de Licenciatura em Matemática do IFGoiano para a inclusão, e torna o projeto mais inclusivo, contudo, há o sentimento de que muito precisa ser feito para tornar o projeto do Torneio de Jogos Matemáticos cada vez mais inclusivo.

Por esses aspectos, ficou evidente na participação dos estudantes com deficiência e dos demais colegas, a alegria e satisfação proporcionada pelas adaptações dos jogos e para eles poderem jogar. Para a equipe executora ficou o aprendizado de que qualquer projeto a ser desenvolvido pelo Departamento de Matemática, a partir de agora, deverá ser elaborado considerando todos os alunos e fica a sugestão para os leitores de realizarem adaptações de jogos em projetos com a finalidade educativa.

O trabalho em equipe foi fundamental para o sucesso do projeto. As decisões foram tomadas após análises e discussões das situações. Nesse sentido, a coordenação do referido projeto de extensão, no final do ano de 2019, adquiriu 03 regletes que vão contribuir para as adaptações dos jogos. A proposta é que os nomes dos jogos nos tabuleiros, as regras dos jogos e as regras do Torneio estejam em braille para o desenvolvimento do VI Torneio de Jogos Matemáticos, que seria realizado em 2020, mas não aconteceu devido a suspensão das aulas presenciais em decorrência da pandemia do coronavírus. A sexta edição do Torneio acontecerá quando as aulas presenciais forem retomadas.

REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino da matemática:** uma prática possível [livro eletrônico]. Campinas, SP: Papirus, 2020.

ABRANTES, K. **A importância dos jogos didáticos no processo de ensino aprendizagem para deficientes intelectuais**. Campina Grande: FIEP, 2010.

COELHO, C. M. **O jogo como prática pedagógica na escola inclusiva.** Artigo (Especialização em Educação Especial), Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, Conselheiro Lafaiete, MG, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/1485/Coelho_Vania_Maria.pdf?sequence=1. Acesso em: 04-01-2021.

KLLISYS, A. **Jogos de tabuleiro do mundo.** Curitiba: Caleidoscópio, Brincadeira e Arte, 2017. 117 slides, color.

NETO, J. P.; SILVA, J. N. J**ogos matemáticos, Jogos Abstractos.** Lisboa: Gravida, 2004. 217p. (O Prazer da Matemática).

ROSA, F. M. C. **Histórias de vida de alunos com deficiência visual e de suas mães: um estudo em educação matemática inclusiva**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista, 2017.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I; MILANI, E. **Cadernos do Mathema:** Jogos de matemática de 6° ao 9° ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

ZASLAVSKY, C. **Jogos e Atividades Matemáticas do Mundo Inteiro.** Porto Alegre: Artmed, 2000.

CAPÍTULO 25

ATRIBUINDO "SENTIDO" AO ALGORITMO DA DIVISÃO EM SALA DE AULA: PROPOSITURA DE ABORDAGEM METODOLÓGICA SEMIÓTICA FUNDAMENTADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE OTTEANO

Data de aceite: 01/03/2021
Data da submissão: 18/12/2020

Jacqueline Borges de Paula
Universidade Federal de Mato Grosso-UFMT, Instituto de Educação, Departamento de Ensino e Organização Escolar
Cuiabá – Mato Grosso
http://lattes.cnpq.br/5893656990263610

RESUMO: Apresentamos intervenção didática estruturada metodologicamente e didaticamente na perspectiva Semiótica do Pensamento sobre Complementaridade Otteano – PsCO. Relacionado ao conhecimento Matemático abordamos situação problema onde é requerida a operação de divisão e tomamos o algoritmo Dominante como estrutura matemática à sua resolução. Os dados aqui apresentados contemplam fase inicial de pesquisa-ação realizada de 2016 a 2018. Defendemos que essa propositura metodológica e didática oportuniza aos educandos atribuírem "sentido" as etapas e ao processo de resolução desse algoritmo. A intervenção didática foi realizada com alunos do terceiro ciclo dos anos finais do Ensino Fundamental, em uma escola pública do estado de Mato Grosso. Observamos ser promissora a abordagem Semiótica no PsCO para sala de aula, enquanto tratamento metodológico e didático, pois ela nos permite colocar em evidência, na relação entre atividade (situação problema), representação (conhecimento matemático) e sujeito as dimensões: referência e sentido.

PALAVRAS-CHAVE: Divisão, Matemática, Semiótica, Complementaridade, Sentido.

ASSIGNING "MEANING" TO THE ALGORITHM OF THE DIVISION IN THE CLASSROOM: PROPOSITURE OF A SEMIOTIC METHODOLOGICAL APPROACH BASED ON THOUGHT ABOUT OTTEAN COMPLEMENTARITY

ABSTRACT: We present didactic intervention structured methodologically and didactically in the Semiotic perspective of Thought on Otteano Complementarity - PsCO. Related to Mathematical knowledge, we approach a problem situation where the division operation is required and we take the Dominant algorithm as a mathematical structure for its resolution. The data presented here includes an initial phase of action research carried out from 2016 to 2018. We argue that this methodological and didactic proposition gives the students the opportunity to attribute "meaning" to the steps and process of solving this algorithm. The didactic intervention was carried out with students of the third cycle of the final years of elementary school, in a public school in the state of Mato Grosso. We observed that the Semiotic approach in PsCO for the classroom is promising, as a methodological and didactic treatment, since it allows us to highlight, in the relationship between activity (problem situation), representation (mathematical knowledge) and subject to the dimensions: reference and meaning.

KEYWORDS: Division, Mathematics, Semiotics, Complementarity, Meaning.

1 | INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta um recorte de intervenção didática planejada e estruturada em projeto de pesquisa-ação, desenvolvido de 2016 a 2018 em uma escola Estadual do estado de Mato Grosso, com alunos dos anos finais – 3º ciclo - do Ensino Fundamental.

Nosso objetivo na pesquisa foi verificar sobre as possibilidades e limites no processo ensino-aprendizagem da matemática quando empreendemos uma "nova" abordagem metodológica e didática ao conhecimento matemático em sala de aula, constituída a partir dos pressupostos teóricos e epistemológicos da Semiótica no Pensamento sobre Complementaridade Otteano.

Como recorte da referida pesquisa, trazemos para este momento a apresentação de intervenção didática onde empreendemos tratamento metodológico[1] e didático[2] na perspectiva Semiótica do Pensamento sobre Complementaridade Otteano à operação da Divisão e ao algoritmo Dominante.

Os fundamentos teóricos e aspectos epistemológicos desta propositura metodológica são neste momento, contemplados de modo introdutório. Trata de uma teoria que se encontra em desenvolvimento por mais de 40 anos pelo professor Michael F. Otte. Sobretudo acreditamos que, os pontos aos quais destacamos agregados à descrição e narrativa sobre a intervenção didática, podem conduzir a que o leitor vá construindo uma aproximação aos fundamentos dessa teoria.

Foi muito importante à estruturação da pesquisa e na construção, planejamento e organização da intervenção didática, a avaliação contínua centrada na reação dos alunos a cada encontro, uma vez que estávamos buscando construir um caminho que concebemos figurar uma "nova" abordagem. De modo que, eram sempre os apontamentos e a reação dos alunos que norteavam os (re)direcionamentos a serem seguidos, relacionados à construção metodológica de abordagem Semiótica ao Conhecimento Matemático em evidência.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA À INTERVENÇÃO DIDÁTICA

Existem dois conceitos fundamentais na teoria de Otte: Semiótica e Complementaridade. A dimensão Semiótica, está diretamente relacionada em agregar ao projeto educativo uma compreensão mais profunda sobre o processo envolvido no desenvolvimento do Conhecimento Matemático. E a dimensão sobre Complementaridade, vincula e impregna à Semiótica, aspectos que no desenvolvimento do Conhecimento Matemático tratam da relação dinâmica, uma heurística relacional, entre campo referencial e sentido.

1. Tem a ver com uma sistematização baseada em determinados fundamentos e princípios teóricos relacionado à determinado conhecimento

2. Relativo à organização ao ensino; tem a ver com a arte de ensinar, organizar e selecionar momentos e atividades para apresentar determinados conteúdos.

Perceba que, o que buscamos empreender no processo de ensino e que esperamos tenha reflexos positivos no processo de aprendizagem da Matemática é o que entendemos por uma 'prática consciente'. Ambicionamos mitigar uma relação paradoxal do tipo que dicotomiza prática e teoria ao empreender esforço metodológico e didático de um exercício direcionado ao pensamento de Complementaridade Otteano à abordagem Semiótica.

Otte (1994) nos informa que a complementaridade também tem a ver com uma heurística metodológica. Na dimensão que trata da relação entre teoria e prática em sala de aula, metodologicamente, numa abordagem semiótica nas atividades em sala de aula, tal complementaridade não será realizada, eliminando as contradições, mas, sim, como sendo um processo dinâmico de procura pela síntese que embarga todas as forças realmente contraditórias que permeiam, nesta atividade, a dimensão entre teoria e prática que se estabelece entre a entidade do conhecimento (conceitos e estruturas matemáticas/ representações) , sujeito e a atividade em desenvolvimento.

A dimensão Semiótica na perspectiva do Pensamento sobre Complementaridade Otteano (PsCO) surge pela busca por uma melhor compreensão do papel do signo e das representações em relação com a atividade matemática e também sobre a comunicação matemática (HOFFMANN, 2005), e ela promove uma abordagem promissora à Educação Matemática.

> Signos e representações têm um papel essencial na Matemática. Pode-se até mesmo dizer que a essência da Matemática consiste em trabalhar com representações: *matematizar* significa representar problemas ou fatos por significados representacionais matemáticos, *calcular* é transformar tais representações de acordo com as regras de um certo sistema de representações, *provar* é representar um teorema como sendo implicado por outros teoremas dentro de um sistema consistente de representações, e *generalizar* é reestruturar tais sistemas de representações para incluir objetos ideais novos e designados simbolicamente (sem implicar nenhum comprometimento ontológico) (HOFFMANN, 2005, p.5).

As representações matemáticas que são elaboradas pelos alunos no processo ensino-aprendizagem, tentam alcançar e experimentar o que Hoffman (2005) designa como 'impossível', a relação que trata dos objetos ideais e a atividade matemática. Sabemos que a cognição matemática é mediada por representações que, de um lado, são objetos próprios da atividade matemática e, de outro, são significados para se desenvolver, posteriormente, o Conhecimento Matemático.

Assim, defendemos que a dimensão semiótica do PsCO é, particularmente, essencial para o ensino e o aprendizado da Matemática. Observe que, no ensino da Matemática, a criança aprende, pela primeira vez, a operar, exclusivamente, com símbolos. Ela percebe que a palavra de objetos concretos e atividades representadas e compreendidas *matematicamente* são confrontadas com o problema de haver, frequentemente, diferentes possibilidades de conceber a mesma situação e ela pode ver que uma mudança dessas

representações, com frequência, torna possível novos *insights*. A criatividade própria da Matemática resulta, exatamente, dessa possibilidade. (HOFFMANN, 2005).

Esses pressupostos apontam a que existem dois aspectos que são importantíssimos do ponto de vista do tratamento didático a uma abordagem Semiótica no Pensamento sobre Complementaridade Otteano – PsCO – em sala de aula, aos quais o professor deve estar sempre atento na estruturação metodológica: a aquisição de vocabulário matemático mais elaborado (1) e a construção conceito-estrutural (2).

Quanto à aquisição de vocabulário, no ponto de vista Semiótico do PsCO, explicar significa representar; daí a Matemática se constituir em uma área de conhecimento que tem linguagem própria. No entanto, Otte (2012) atenta para o fato de que a Matemática nem por isso deva ser considerada como simplesmente uma linguagem. A linguagem, na Matemática, assim como os conceitos matemáticos começam a ser construídos nos anos iniciais e entendem-se que, inclusive, muitos aspectos propriamente da álgebra (enquanto linguagem própria da álgebra) podem ser introduzidos e contemplados neste período.

O professor deve assumir um trabalho em sala de aula que conduza os alunos ao desenvolvimento crescente e de forma elaborada do vocabulário matemático. Utilizar, sempre e corretamente, as nomenclaturas dos termos/elementos (por exemplo: algarismo, numeral e número; o uso inadequado deles faz com que se crie uma confusão enorme na mente dos educandos), das estruturas e operações matemáticas. E deve, também, ter a sensibilidade e muita atenção para entender que muito do que ele possa estar dizendo, embora lhe pareça usual e comum, para os alunos pode não ser desta forma.

Ler enunciados de questões e textos (do livro didático) e conversar com os alunos sobre significado de termos não compreendidos, é um modo muito eficiente para aprimorar o vocabulário dos alunos para além da Matemática. Principalmente, quando, nesses momentos, o professor empreende postura e tratamento investigativo e questionador relacionados aos verbos, nomenclaturas, elementos, estruturas tanto da linguagem materna quanto a de termos próprios da Matemática.

Já a construção conceito-estrutural, para nós, repousa sobre bases construtivistas e evolucionistas. Nesta concepção (PIAGET, 1978), a tese é de que o sujeito que aprende necessita construir por si mesmo seus conhecimentos por meio de um processo adaptativo.

Semioticamente falando, os alunos constroem conceitos e estruturas próprias da matemática mediados pelas representações que são acionadas e requeridas durante este processo adaptativo. Já didaticamente, primeiro, eles estabelecem representações espontâneas e, conforme é empreendida a intervenção – mediação organizada pelo professor, elas irão se tornando representações mais elaboradas, consistentes e coerentes à formalização do Conhecimento Matemático em evidência. Concebe-se que a Matemática compreende relações indexicais e atividades observacionais: o melhor pensamento, especialmente em assuntos matemáticos, é aquele como se tivesse experimentado na imaginação um diagrama ou outro esquema (PIERCE, 1958).

Neste processo construtivo, à introdução de um conceito e estrutura da matemática (conhecimento novo), devemos sempre tomar, como ponto de partida, os conhecimentos prévios dos alunos (suas representações prévias). “Sabemos que esses dois aspectos, conhecimentos prévios e ‘sentido’, são indissociáveis no processo de construção de conhecimento” (DARSIE, 1998, p.91).

Sobretudo, a construção conceito-estrutural na Matemática tem a ver com a construção de “sentido” e o sentido a que nos referimos fundamenta-se numa compreensão adequada sobre a estruturação das representações matemáticas, e sobre como as relações são estabelecidas entre seus termos/elementos nestas. Mas, Otte (2012) alerta que, como não podemos tomar a matemática minimamente como uma linguagem (representação), ela também não pode tomar ser tomada como uma ciência analítica somente de conceitos e sobre estruturas (sentido).

Assistimos no espaço de educação formal um destaque à matemática como sendo uma linguagem, inclusive quando professores direcionam a que os alunos devem “traduzir” uma situação problema para a matemática e depois “é só resolver”. Ainda, encontramos àqueles que acreditam que se o aluno não saber ler e interpretar uma situação problema escrita na linguagem materna, ele não saberá resolver a situação problema que exige conhecimento da matemática. Mas, não é assim, e nem tão simples assim o que está em jogo no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Neste tipo de posicionamento o que observamos é uma ênfase à dimensão referencial quando delineada por um texto escrito, mas fundamentada superficialmente. Ainda, observamos que nenhum destaque é dado à dimensão do “sentido” na constituição dos conceitos e estruturas matemáticas. E, é sobre este aspecto que buscamos trazer maiores esclarecimentos e fundamentados quando nos propomos a relatar e descrever sobre nossa intervenção didática. Procuramos evidenciar e refletir sobre a complementaridade requerida no processo de ensino-aprendizagem da matemática entre a dimensão referencial e dimensão do sentido.

Para construir “sentido” no processo de aprendizagem da Matemática, devem-se planejar e estruturar situações didáticas que coloquem em funcionamento os conhecimentos prévios dos alunos e que esses possam ser associados aos saberes definidos nos programas escolares, mas organizados de modo a serem alicerçados nos primeiros. Dentro dessa premissa, o educando precisa ser instigado a acionar um tipo qualquer de conhecimento como um meio de selecionar, antecipar, executar e controlar estratégias que envolvem representações aplicáveis à atividade didática proposta.

Para nós, o empreendimento construtivo no processo de aprendizagem repousa na produção de uma gênese artificial do conhecimento. Desse modo, ao nos organizarmos didática e metodologicamente, temos de seguir um caminho que consista na construção de um processo de ensinagem às aprendizagens, no qual o conhecimento não seja nem direta nem indiretamente dado pelo professor, mas que ele vá sendo constituído progressivamente

pelo aluno, a partir de múltiplas condicionantes estruturais, e, como resultado de confrontações com obstáculos variados encontrados nas atividades organizadas. Assim, é pela diversidade de interações que devemos promover as modificações para possibilitarem, ao aluno, construções dos conceitos e respectivas estruturas desejadas (PERES, 1982).

Empreender essa "nova" metodologia em sala de aula, foca em que os alunos possam aprender Matemática e aprender sobre a Matemática, para além do contexto referencial, agregando e atribuindo 'sentido', mas, sobretudo, o 'sentido matemático', que é próprio do método matemático, da criatividade do pensamento humano e que se revela na constituição do Conhecimento Matemático. Busco, deste modo, que os alunos, adquiram mais afinidade com o conhecimento matemático ao compreenderem como se processa e formaliza o modo de 'pensar matematicamente' e que, em nosso entendimento, assim procedendo possamos conduzi-los ao desenvolvimento da autonomia intelectual em Matemática.

Hoffmann (2005) nos atenta que a abordagem semiótica proposta por Otte conduz a uma enorme riqueza de questões, tratando de um caminho intrigantemente novo para lidar com a complementaridade, afastando as relações binárias contraditórias na multiplicidade da tríade signo-objeto-interpretante. Ainda destaca, e concordo absolutamente, que essa perspectiva pode oferecer um novo e promissor caminho para uma fundamentação interdisciplinar na relação entre atividade e representação.

3 | ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Trazemos para este momento dados parciais de pesquisa realizada em uma Escola Pública do Estado de Mato Grosso, com duas turmas de alunos que frequentaram o 3º ciclo do Ensino Fundamental. A escola situa-se em um bairro periférico da cidade. Os alunos, entre 11 a 14 anos, eram vindos de famílias de trabalhadores, funcionários de fazendas da região, feirantes, funcionárias do lar, trabalhadores informais, (...).

Categorizarmos nossa pesquisa como sendo do tipo "pesquisa-ação" uma vez que, procuramos unir a pesquisa (teoria) à prática, e daí desenvolver conhecimento e compreensão como parte da prática. E, em nosso caso procurando intervir de modo inovador nesta prática. Ainda, neste caso, agimos de modo a, avaliar empiricamente sobre a validade de um novo empreendimento metodológico à Matemática em sala de aula – a Semiótica no PsCO.

Concordamos com diversos autores (Kemmis e McTaggart, 1982; Dick, 1997 e 1998; Arellano, (s.d); O´Brien, 1998), que fazer pesquisa-ação significa planejar, observar, agir e refletir de maneira mais consciente, mais sistemática e mais rigorosa sobre o que fazemos em nossa experiência diária.

De acordo com os pressupostos metodológicos à pesquisa-ação, algumas características se destacaram em nossa pesquisa:

- Todo o processo revelou-se como um processo de aprendizagem para todos os participantes.

- O critério de validade aos resultados esteve pautado na utilidade dos dados para potencializar o processo ensino-aprendizagem da matemática. Deste modo, o pesquisador assumiu neste contexto, o papel de praticante social que intervém numa situação com a finalidade de verificar sobre a eficácia (ou não) da nova metodologia.

- No processo de ensino, a pesquisa tomou como objeto as ações (e reações) humanas em situações que são percebidas pelo professor-pesquisador como sendo inadequadas sob certos aspectos, que são suscetíveis de mudança e que, portanto, exigem uma resposta prática. Já a nossa problemática foi interpretada a partir do ponto de vista dos envolvidos, baseando-se, portanto, sobre as representações que os diversos atores tiveram da situação.

- Representou uma pesquisa situacional: buscamos diagnosticar um problema específico numa situação também específica, com a finalidade de atingir uma relevância prática aos resultados.

- Sobre a relevância que intencionamos, buscamos relacionado ao investimento à uma "nova" metodologia alegar a possibilidade de generalização dos resultados desta pesquisa. Mas, realçamos a necessidade de maiores e ampliados estudos em outras diferentes situações, que apontem resultados semelhantes aos aqui encontrado, para nos permitir a esta capacidade de generalização.

- Revelou-se uma pesquisa auto avaliativa, uma vez que, as modificações que buscamos introduzir na prática foi constantemente avaliada no decorrer do processo de investigação/intervenção, e, o feedback que obtemos do monitoramento era traduzido em modificações, mudanças de direção e redefinições, conforme necessário, buscando trazer benefícios ao processo como um todo.

- E, ainda tratou de uma pesquisa cíclica: as fases finais eram utilizadas para aprimorar os resultados das fases anteriores.

A nossa opção por construir uma intervenção didática que tomasse na divisão o algoritmo Dominante, foi delineada por diagnóstico realizado para verificação dos conhecimentos prévios dos alunos relacionado à essa operação na matemática.

Apresentadas atividades aos alunos onde era requerido ações relacionadas à medição e partilha entre dois números, os alunos não apresentaram desempenho adequado. A grande maioria dos alunos não conseguiam efetuar uma análise sobre a ordem de grandeza na relação estabelecida entre dividendo e divisor. Não identificavam adequadamente a partir da situação problema a que termos os valores se referiam. Não buscavam estratégias pessoais ou alternativas para procederem os cálculos que pudessem conduzi-los à uma possível resposta, e, quando buscavam um procedimento algorítmico para efetuarem a resolução este era sempre o Algoritmo Dominante (também conhecimento como Método da Chave).

E, ainda, os alunos tinham uma forte crença de que, se não soubessem a “tabuada da multiplicação decorada” não saberiam dividir. Assim optamos por revisitar o conceito de divisão com alunos, e como procedimento de resolução tomamos algoritmo dominante, priorizando os conhecimentos prévios. Sobretudo, agora assumindo uma nova postura metodológica e didática diante desses, buscando promover a que os alunos aprimorassem a interpretação referencial e atribuíssem “sentido” ao processo de resolução algorítmica.

4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Observamos relacionado à interpretação de situações problemas, que os alunos ficavam confusos e não compreendiam adequadamente sobre os contextos referenciais requeridos no processo da divisão e divisão, sejam eles: (1) medida – quantas vezes cabe, (2) partilha – repartição equitativa de elementos de um conjunto – repartir e (3) razão – que tem a ver com uma comparação da parte em relação com o todo. E, compreender uma operação matemática implica saber utilizá-la em uma situação cotidiana (dimensão referencial), cujo o entendimento deve haver sido processado anteriormente à aplicação de um algoritmo para resolvê-la.

Ademais, no trabalho metodológico e didático com a operação de divisão, simultaneamente, são requeridas no processo de aprendizagem da resolução algorítmica, além de boa compreensão do SNDP, saber somar e subtrair. Essa complexidade, pode ser o motivo, de nos depararmos em sala de aula com muitos casos de alunos que não apresentam êxito nas atividades que requerem tal operação.

O algoritmo Dominante é aquele em que se trabalha todo o algoritmo com o *dividendo* e *divisor* decompostos, nas respectivas ordens, obtendo-se, também, um *quociente* decomposto durante o processo. O primeiro problema desse algoritmo é que, na sua resolução, a dimensão referencial contextual está praticamente ausente, aparecendo timidamente na obtenção de cada algarismo do quociente. E o segundo problema, é que no processo de ensino não é apresentada aos alunos uma compreensão sobre como se processam as relações entre os elementos/termos nesse algoritmo. O primeiro problema aponta a uma desvinculação dos cálculos ao contexto referencial, e o segundo uma exclusão no processo de ensino-aprendizagem da dimensão do sentido desse conhecimento matemático.

Para o aprendizado da divisão e do algoritmo da divisão, primeiro o aluno deve entrar em contato com atividades que lhe possibilite interpretar os diversificados contextos referenciais que podem ser atribuídos a essa ação à operação matemática e seguidamente no desenvolvimento de resolução algorítmica compreender sobre o sentido embutido na estruturação e operacionalização entre os termos envolvidos.

Destacamos agora ao tratamento didático que empreendemos ao algoritmo Dominante da divisão, numa abordagem metodológica Semiótica e da Complementaridade no pensamento Otteano. Apresentamos a situação problema abaixo aos alunos:

Tenho um saco com um mil, oitocentas e quarenta e duas laranjas. Vou separar essas laranjas em caixas com capacidade para setenta e duas laranjas em cada caixa. Quantas caixas serão utilizadas?

Etapa inicial da análise:

a) 1842 laranjas : 72 (grupos de 72 laranjas)

b) 1842 | 72

Número de caixas com 72 laranjas

Esta tem a ver com uma análise reflexiva e avaliativa sobre o contexto referencial (situação problema) e sobre a ordem de grandeza do dividendo em relação ao divisor, como do quociente em relação ao divisor. Observamos que tomaremos 1842 unidade de laranjas que deverão ser agrupadas em grupos de 72 elementos de laranjas (a capacidade total de uma unidade de caixa). Isto implica que, o resultado que iremos obter (no quociente) tratará do número de agrupamentos de 72 elementos que será possível realizar, indicando assim o número de caixas que será utilizada.

Anteriormente à resolução algorítmica algumas reflexões iniciais devem ser problematizadas com os alunos, sejam elas: Se em cada caixa teremos 72 laranjas, então posso concluir que em dez caixas comportam 720 laranjas? Em vinte caixas 1440 laranjas? Assim, podemos ir construindo uma ideia inicial sobre o número de caixas que serão necessárias, verificando por exemplo que, vou necessitar de um número de caixas superior a 20 e inferior a 30 caixas.

Após a problematização, em conjunto com a classe, algumas estratégias alternativas podem ser representadas e sistematizadas. Podemos por exemplo, subtrair de 1842 a quantidade de 1440, que posso separar em 20 caixas. Verificando um resto de 402 laranjas, e, para indicar a quantidade necessária de caixas para este resto, posso proceder executando somas sucessivas de 72:

$$72 + 72 + 72 + 72 + 72 = 360$$

Verificamos que é possível mais 5 agrupamentos de 72 laranjas, ou seja, consigo completar mais cinco caixas. De modo que, tomando as 20 caixas iniciais somadas a mais essas 5 caixas, observo que vou utilizar 25 caixas cheias. Entretanto, utilizarei mais 1 caixa para colocar as 42 laranjas (402 – 360 = 42) que restaram. Efetuando a análise do resto, pois a natureza do contexto quantificável é muito importante, temos a indicação de não posso continuar a divisão pois não vou partir as laranjas para distribuir em caixas.

Perceba que, até aqui, não houve a necessidade de utilização do algoritmo Dominante para resolver o problema proposto. O algoritmo Dominante muito nos ajuda quando temos cálculos extensos para serem efetuados. Ele é uma estrutura matemática

construída para calculações, no sentido de que, funciona para toda e qualquer repartição de um numeral em agrupamentos menores referente a este numeral e independentemente de um contexto referencial. Se a divisão deve ser operacionalizada entre dois números quaisquer do SNDP, este algoritmo sempre será uma ferramenta útil.

Agora passamos à análise sobre o processo de resolução algorítmica:

1842 | 72

Dividendo = 1842 laranjas
Divisor = 72 (números de elementos no agrupamento)

Temos que dividir 1842 unidades de laranjas em grupos de 72 unidades de laranjas. O raciocínio neste algoritmo toma como premissa que podemos analisar o dividendo por partes, isto é, de acordo com os agrupamentos possíveis no SNDP. Observe que podemos tomar o número 1842 agrupado de formas diferentes:

a) 1 M + 8 C + 4D + 2 U = 1842 unidades de laranjas
b) 18C + 4D + 2U = 1842 unidades de laranjas
c) 184D + 2U = 1842 unidades de laranjas
d) 1842U = 1842 unidades de laranjas

Observe que em todas as opções acima (a, b, c, d) estou tratando do mesmo valor numérico (1842), o que muda é o modo como olho (como tomo) este valor para trabalhar algoritmicamente. O que realizo para efetuar esta mudança de olhar são desagrupamentos e reagrupamentos de valores, no mesmo número, aos algarismos correspondentes.

O algoritmo Dominante da divisão é estruturado de modo que possamos ir executando a divisão entre dividendo e divisor por etapas. Iniciando primeiro pelo algarismo de maior valor de referência na representação do numeral. E, caso não seja possível a divisão, posso proceder fazendo rearranjos (desagrupamentos e agrupamentos) na representação numérica para verificar a possibilidade de se efetuar a divisão.

Se tomamos 1842 agrupado como em “a”, analisando a possibilidade de divisão por partes e começando pelo milhar, observo que não existe a possibilidade de 1M formar grupos de 72 elementos de Milhar.

De outro modo, se eu tomo 1842 agrupado como em “b” : neste caso procedemos a uma transformação do valor de referência na posição de Milhar (1) e o transformamos em centenas (10C), que foram agregadas a 8 centenas existentes formando 18C. Ao tentar efetuar a divisão, observo que com 18C também não consigo formar um agrupamento de 72 elementos de Centenas.

Agora observando a possibilidade do agrupamento de 1842 como em "c", onde as 18C foram desagrupadas para formar dezenas (180D) e estas agregadas às dezenas existentes (4D). Verifico que com 184D existe a possibilidade de formar agrupamentos de 72 elementos de dezenas. Então é por este motivo que na primeira etapa do processo de resolução efetuo a divisão de 184 (que na realidade é 184 dezenas) por 72 (que neste caso será elementos de dezenas). E, vou obter como resultado 2 (dois agrupamentos de 72 elementos de dezenas).

```
 1 8 4' 2 | 7 2        1ª Etapa
- 1 4 4     2
 ______
   4 0
```

Tenho 2 agrupamentos de 72 elementos de dezenas de laranjas, equivale a 144 dezenas de laranjas, subtraio este valor que já agrupei do dividendo 184 dezenas e sobram 40 dezenas de laranjas. Da quantidade inicial só me resta dividir 40 dezenas de laranjas que sobraram na primeira etapa, a qual agrego 2 unidades que ainda não participaram da divisão, ficando com 402 unidades de laranjas.

```
 1 8 4 2 | 7 2         2ª etapa
- 1 4 4     2
 ______
   4 0 2
```

Na segunda etapa estamos com 402 unidades de laranjas no dividendo, para verificar quantos grupos posso formar de 72 elementos de unidades. Não há necessidade de saber decorado a tabuada, basta proceder por somas sucessivas de 72 unidades até encontrar um número próximo de 402. Verifico que são possíveis 5 agrupamentos de 72 elementos de unidades. Cinco grupos de 72 elementos de unidades, equivale a 360 unidades de laranjas. Subtraio do dividendo (402) o valor de 360 e obtenho um resto de 42 unidades de laranjas.

```
 1 8 4 2 | 7 2         3ª etapa
- 1 4 4     2 5
 ______
   4 0 2
 - 3 6 0
  _______
     4 2
```

Dividendo = 1842 laranjas

Divisor = 72 (número de elementos nos agrupamentos)

Quociente = 25 (número de agrupamentos efetuados com 72 elementos)

Resto = 42 (sobra de laranja)

Analisando a terceira etapa, concluímos que se eu dividir 1842 unidades de laranjas em grupo de 72 elementos de unidades de laranjas, formo 25 grupos de 72 elementos cada, e tenho como sobra 42 unidades de laranjas. De modo que, serão necessárias 26 caixas, 25 ficaram com 72 laranjas exatamente e 1 caixa com 42 laranjas. Assim, o *resultado* da divisão é 26 caixas e não 25, concordam? Pois teremos 25 agrupamentos/caixas de 72 laranjas e 1 agrupamento/caixa de 42 laranjas – o *resto*.

Observamos que, um aspecto importante, e que, pode ser mais trabalhoso ao entendimento dos alunos no processo de resolução desse algoritmo, trata de que sempre que tomo o dividendo para efetuar a divisão pelo divisor: se a parte tomada no dividendo para análise sobre a possibilidade de divisão pelo divisor é a referente à Milhar o divisor assume agrupamento possíveis em elementos de milhar; se meu dividendo é Centenas, o divisor assume agrupamento possíveis em elementos de centenas; se meu dividendo é representado em Dezenas, de mesmo modo o divisor assume agrupamentos possíveis em elementos de dezenas; e, se meu dividendo é expresso em unidades o divisor assume agrupamentos possíveis em elementos de unidades.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao introduzir o conceito da divisão e o algoritmo Dominante, devemos priorizar tanto o aspecto referencial (os contextos práticos destacados no ato de dividir) como o aspecto do sentido (contexto das construções das estruturas matemáticas). É destacando a dinâmica relacional de complementaridade entre "referência" e "sentido" no processo ensino-aprendizagem da matemática, que oportunizamos aos alunos, conhecerem sobre o método próprio do desenvolvimento do Conhecimento Matemático – aprendendo a lidar estruturas e representações próprias da matemática. Deste modo, eles podem também caminhar no sentido de elaborarem suas estratégias próprias e até mesmo desenvolverem estruturas e algoritmos diferenciados e particulares.

Assim, observamos que a abordagem Semiótica no PsCO para sala de aula, figura frutífera às aprendizagens enquanto tratamento metodológico e didático, pois ela nos permite colocar em evidência, na relação entre atividade, Conhecimento Matemático e sujeito(s) as dimensões: referência e sentido. De forma que, conseguimos uma abordagem e tratamento metodológico e didático mais elaborado quando investidos de uma postura Semiótica no PsCO à educação matemática.

Embora tenhamos focado na operacionalização do algoritmo Dominante, entendemos que uma estratégia apropriada é apresentar, no processo de ensino-aprendizagem da operação de Divisão, formas algorítmicas variadas, para que os alunos percebam as relações estabelecidas nessas estruturas. Sobretudo, qualquer que seja o procedimento algoritmo adotado, este deve ser trabalhado metodologicamente e didaticamente, de modo

a dar mais significado/sentido aos seus termos e às suas etapas, sem que seja requerido dos alunos que decorem ou a "tabuada" ou utilizem somente "regras mágicas"[3].

Muitas pessoas, equivocadamente entendem que se o aluno não sabe a tabuada da multiplicação, não aprenderá a dividir. Está é uma crença equivocada. Primeiro porque não devemos solicitar que o aluno "decore" a tabuada da multiplicação; ele tem que compreender o processo multiplicativo de parcelas (iguais ou diferentes), como também construir suas estratégias alternativas para efetuar tais cálculos. E, segundo, o processo de memorização será uma consequência das e nas atividades desenvolvidas dentro e fora da escola.

Em nossa intervenção, a opção de usar a estratégias de somas sucessivas do divisor para se chegar ao valor do dividendo (ou que mais se aproximasse a este) para encontrarmos o valor do quociente, também foi feita com o intuito de que os alunos fossem construindo o conceito multiplicativo (enquanto somas sucessivas de um mesmo valor), e trabalhassem no sentido de ficarem mais habilidosos nos cálculos.

Também é interessante que o professor comece por valores menores, para que os alunos possam ir se apropriando dos diversos aspectos envolvidos, e posteriormente quando estão mais habilidosos ampliar os cálculos. Cabe destacar ainda que, ao se apresentar qualquer situação problema, estas devem ser, inicialmente, bem problematizadas pelo professor em sala de aula com a classe, inclusive, este aspecto ajuda a educar o cérebro dos alunos a efetuarem, automaticamente, a problematização de situações futuras-refletirem, selecionarem e organizarem os dados.

REFERÊNCIAS

DARSIE, Marta M. P. **A Reflexão distanciada na construção dos conhecimentos profissionais do professor em curso de formação inicial**. 1998. 316 f. Tese (Doutorado em Educação: Didática) – FE/USP, São Paulo, 1998.

HOFFMANN, M. H. G; LENHARD, J.; SEEGER, F.(editors) **Activity and Sing**: grounding mathematics education. USA: Spring, 2005.

PERES, J**. Utilisation de la théorie des situations didactiques em vue de l'identification des objets et des phénoménes ertinents au cours d'une activité de construction d'um code de désignation** à l1école **maternelle.** Deuxième École d'Été de Didactique des Mathématiques. Olivet, 1982.

OTTE, Michael F.. **O Formal, O Social e o Subjetivo:** Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.

_____. **Complementarity, Sets and Numbers. Educational Studies in Mathematics.** Netherlands, n.53, p.203-328, 2003.

3. Tratam daqueles tipos de procedimentos que são repassados aos alunos à resolução de qualquer tipo de algoritmo sem que haja qualquer esclarecimento sobre seus fundamentos – tipo: "cumpra-se".

______. **A Realidade das Ideias:** uma perspectiva epistemológica para Educação Matemática. Tradução de Alexandre Silva Abido. et all,. Cuiabá: Editora da Universidade Federal de Mato Grosso, 2012.

PEIRCE, Charles. S**. Collected Papers of Charles Sanders Peirce.** V, I-VI, ed, by Charles Hartshorme and Paul Weil, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, V. VII – VIII, ed. By Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP), 1958.

PIAGET, Jean. **El equilíbrio de las estructuras cognitivas**. Madrid: Siglo XXI, 1978.

CAPÍTULO 26

A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Jheniffer Munslinger Schroer
Faculdades Integradas de Taquara-Faccat
Taquara/RS
http://lattes.cnpq.br/6922436612235557

Lucieli Martins Gonçalves Descovi
Faculdades Integradas de Taquara-Faccat
Taquara/RS
http://lattes.cnpq.br/0273501141730107

RESUMO: Os jogos e materiais concretos são de extrema importância no ensino e aprendizagem de matemática, como se observa em algumas pesquisas, a utilização destes métodos prendem a atenção dos alunos e estimula a curiosidade. Este trabalho é uma proposta de criação e aplicação de jogos e materiais concretos na disciplina de laboratório II, oferecida pelo curso de Matemática, das Faculdades Integradas de Taquara, no 1º semestre de 2020. De acordo com a teoria de Piaget a utilização do material concreto é um fator importante para a aprendizagem, em que encoraja o indivíduo a desenvolver suas habilidades, em especial, as cognitivas. É possível destacar que as atividades lúdicas possibilitam a interação entre os alunos, professor e o conhecimento abordado (GROENWALD, TIMM, 2020). Foi apresentado o dominó trigonométrico, o objetivo é de fixar dados de seno, cosseno e tangente, utilizados na resolução de problemas. O jogo disponibiliza uma tabela, com os valores das razões trigonométricas e os alunos utilizam para consultar de acordo com suas peças. A proposta de jogo do dominó, utiliza as regras do dominó tradicional, porém suas peças são compostas por valores de seno, cosseno e tangente com seus respectivos ângulos. No decorrer do jogo os alunos vão utilizando suas peças e consultando a tabela, vence o jogador que terminar com suas peças primeiro. Os jogos e materiais concretos são trabalhados de forma muito positiva em sala de aula, pois além de usada para introduzir conteúdo, também podem ser utilizados para a fixação de conceitos (TOLEDO, 1997).
PALAVRAS-CHAVE: Material concreto, Jogos matemáticos, Trigonometria.

THE USE OF GAMES AND CONCRETE MATERIALS IN THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS

ABSTRACT: Concrete games and materials are of extreme importance in the teaching and learning of mathematics, as observed in some researches, the use of these methods catches the students' attention and stimulates curiosity. This work is a proposal of creation and application of games and concrete materials in the subject of laboratory II, offered by the Mathematics course of the Integrated Colleges of Taquara, in the 1st semester of 2020. According to Piaget's theory the use of concrete material is an important factor for learning, in which it encourages the individual to develop his abilities, especially the cognitive ones. It is possible to highlight that playful activities enable interaction between students, teacher

and the knowledge addressed (GROENWALD, TIMM, 2020). The trigonometric domino was presented, the objective is to fix data of sine, cosine and tangent, used in problem solving. The game provides a table, with the values of the trigonometric reasons and the students use to consult according to their pieces. The proposal of the domino game, uses the rules of the traditional domino, but their pieces are composed of values of sine, cosine and tangent with their respective angles. During the game the students use their pieces and consulting the table, the player who finishes with their pieces first wins. The games and concrete materials are worked in a very positive way in class, because besides being used to introduce content, they can also be used to fix concepts (TOLEDO, 1997).
KEYWORDS: Concrete material, Mathematical games, Trigonometry.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte de um projeto de pesquisa proposto na disciplina de laboratório II, oferecido pelo curso de Matemática das Faculdades Integradas de Taquara. O estudo envolveu o ensino e aprendizagem de matemática no ensino médio, envolvendo a utilização de materiais concretos e jogos de matemática no ensino e aprendizagem. A escolha do tema investigado, trigonometria, foi devido a necessidade dos alunos memorizarem os valores correspondentes das razões trigonométricas, que são de suma importância no decorrer da vida acadêmica do estudante.

Lorenzato (2006) destaca que a construção de jogos e materiais concretos possibilita um espaço de criação pedagógica, que desafia os alunos a aprendizagem de um conceito investigado de forma lúdica e significativa. O autor destaca ainda que por meio do planejamento do docente é possível promover aulas criativas que os alunos questionem a fim de facilitar o acesso ao conhecimento

O objetivo é promover o ensino de matemática por meio de jogos relacionados ao conceito de razões trigonométricas utilizando um dominó trigonométrico, desenvolvido pelas autoras.

A metodologia utilizada é de cunho qualitativo e exploratório devido aos resultados obtidos durante a elaboração e exploração do jogo com os colegas da disciplina de laboratório II, no 1º semestre de 2020, do curso de licenciatura de Matemática.

2 I JOGOS E MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

As autoras Groenwald e Timm (2020, p.01) destacam que

> Ensinar matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

Com isso, o jogo e o material concreto é uma alternativa de estimular e motivar o aluno ao raciocínio lógico, e ainda a interação com os colegas durante a prática do jogo.

Piaget (1970) escreve que a manipulação com objetos do ambiente físico é um fator básico no desenvolvimento das estruturas cognitivas do indivíduo. O autor destaca que há dois tipos de experiências, muito importantes nas ações pedagógicas, que são psicologicamente muito diferentes. Primeiro o que ele chama de experiência física e segundo, o que ele chama de experiência lógico-matemática. O conhecimento, segundo Piaget, não resulta de olhar e fazer simplesmente uma cópia mental, uma imagem de um objeto, isto é, para conhecer um objeto, é necessário manipular, agir sobre ele, ou até modificá-lo, e transformá-lo, sendo assim, compreender o processo dessa transformação e, sendo assim, entender a maneira como o objeto é construído.

Toledo e Toledo (1997) apresenta em seu livro uma estratégia para auxiliar no desenvolvimento da criança no ensino da Matemática, onde o uso de jogos pode ajudar a desenvolver o pensamento lógico-matemático e também do pensamento espacial, trabalhando também a estimativa e o cálculo mental.

3 | JOGO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

A ideia de construção do jogo foi retirada a partir de um vídeo do YouTube onde duas pessoas demonstravam como ocorria o jogo, porém não foi encontrado para a impressão da tabela do jogo e das folhas para a confecção das peças, então, através da visualização do vídeo, foi elaborado e modelo de peças, da tabela e das regras em um programa de computador chamado Corel Draw. Para a confecção das peças foi utilizado EVA, para que as peças pudessem ficar mais sólidas e semelhantes ao máximo com as peças originais de dominó.

O jogo dominó trigonométrico nos remete a lembrar do dominó tradicional, onde as regras de distribuição de peças e também para ganhar o jogo se mantém conforme as regras originais, entretanto este dominó contém apenas 24 peças, diferente do dominó tradicional que possui 28 peças ao todo. A seguir na imagem, da Figura 1, apresenta-se as peças do dominó trigonométrico.
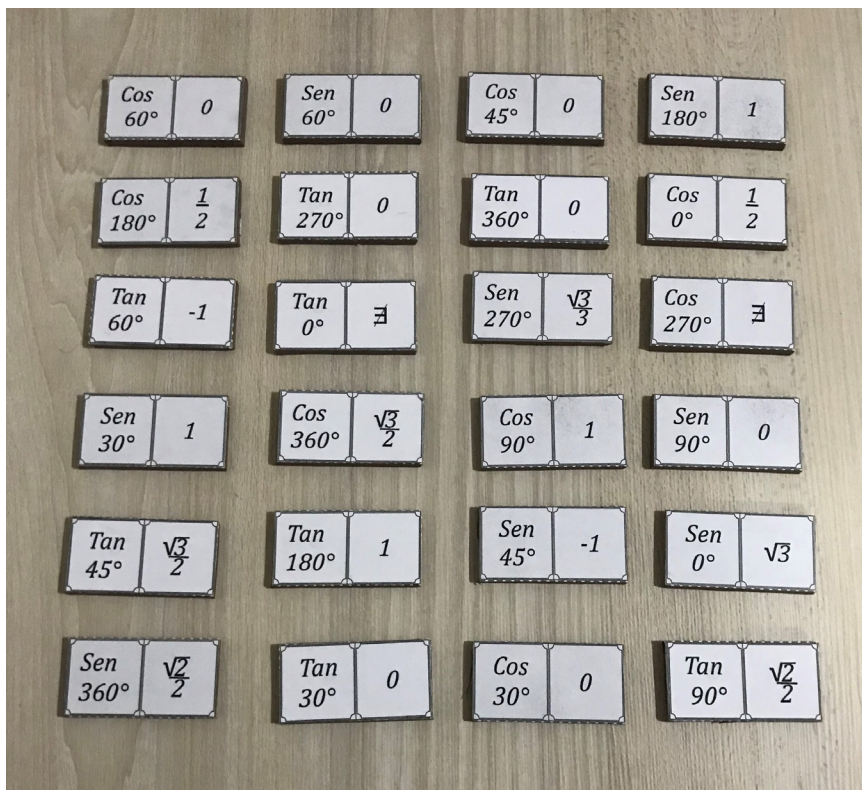
Figura 1: Peças do dominó trigonométrico

Fonte: Autoras (2020)

Se observa que no lado esquerdo da peça estão as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, e os ângulos, no lado direito da peça estão os valores correspondentes de cada razão.

Com as peças do dominó é disponibilizado uma tabela (FIGURA 2), para utilizar durante o jogo, nesta possui os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º, 60º, 90°, 180º e 360°. O jogo busca trabalhar a fixação dos principais ângulos, onde esses normalmente são mais utilizados em situações problemas de Matemática, tanto em sala de aula como avaliações externas.

Tabela de Valores: Seno, Cosseno e Tangente

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Figura 2: Tabela das razões trigonométricas dos ângulos

Fonte: Autoras (2020)

Aconselha-se que cada rodada tenha no máximo 4 jogadores, onde cada jogador recebe 4 peças e o restante fica em um monte. Ou se jogar em duplas, cada um recebe 7 peças. Os jogadores devem ir colocando as peças sobre a mesa, na sua vez, conforme o ângulo notável, que cada peça representa, caso o jogador não tenha a peça correspondente, deve comprar do monte. Durante todo o jogo pode-se utilizar a tabela com os valores e ganha quem terminar todas as suas peças primeiro. É importante que os alunos joguem diversas vezes para assim memorizar os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

4 | METODOLOGIA

Devido a pandemia do Covid 19, as aulas de Laboratório II foram ministradas de forma síncrona, por meio da plataforma Meet, nos sábados de manhã, sendo assim, o jogo descrito no capítulo anterior, foi apresentado aos colegas da disciplina de laboratório II, ministrada pela professora Lucieli Descovi, por meio de um vídeo. O vídeo apresenta duas pessoas jogando, nele foi demonstrado a metodologia do jogo, o objetivo, as regras e o desenvolvimento. A figura 3, representa o momento da apresentação do vídeo aos colegas.
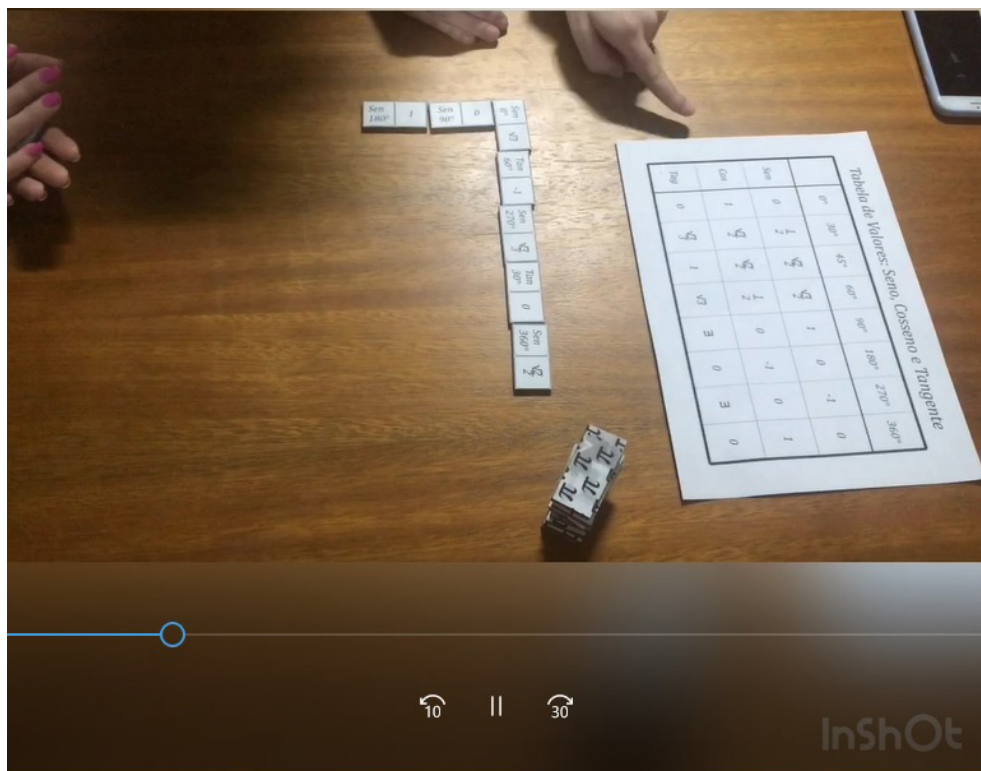
Figura 3: Imagem do vídeo apresentado aos colegas da disciplina de laboratório

Fonte: Autoras (2020)

A imagem apresenta um *print* da tela do vídeo, realizado durante a demonstração do jogo. O vídeo está disponível no YouTube em: <https://youtu.be/ut2F9GKQfFA>.

O docente de matemática, no seu planejamento, poderá possibilitar a construção do jogo pela própria turma de alunos, como por exemplo o recorte de peças e tabela, visto que para uma turma de vários discentes, seria necessário mais que um jogo de dominó trigonométrico.

Após o jogo é de suma importância os alunos descreverem em seu material individual as conclusões e resultados obtidos do jogo.

5 I CONCLUSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo foi alcançado por que o intuito desde o começo foi que o jogo ajudasse a melhor fixação dos valores postos na tabela e de acordo com as palavras da jogadora 1, explanadas no vídeo: "O jogo foi desafiador pois até nós conseguirmos entender a ideia de consultar a tabela para dar seguimento ao jogo é difícil, contudo a partir do momento que você entende ele se torna divertido e principalmente uma grande fonte de aprendizado".

Os autores Groenwald e Tim (2020) enfatizam que o jogo possibilita que o educando memorize com mais facilidade que apenas visualizar na tabela, em livros e ou outro meio.

Dentre inúmeros pensamentos que abordam e aprovam o uso de jogos em sala de aula no ensino da Matemática, lembramos também o autor Panizza (2006) que afirma o quão importante é a introdução de jogos já nos anos iniciais.

> A introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de ensinar e diminuir bloqueios apresentados por crianças\alunos que temem a disciplina e se sentem incapazes de aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva, nota-se, que ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a processos de aprendizagem (PANIZZA, 2006, p. 53)

A busca pela inovação em sala de aula é primordial para um ensino de qualidade, onde o básico se faz necessário, contudo os jogos e materiais concretos pode trazer aos alunos uma base de ensino muito melhor, auxiliando na interação de alunos para com os professores e também entre eles, e fixando de maneira mais eficaz os conteúdos abordados de maneira lúdica.

REFERÊNCIAS

GROENWALD, C. L. O.: TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO, Sérgio. (org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

PANIZZA, Mabel. **Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais: Análise e Propostas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

PIAGET, Jean. **Psicologia e Pedagogia**. Ed. Forense, Rio, 1970.

TOLEDO, Marília. TOLEDO, Mauro. **Didática da matemática: com a construção da matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

CAPÍTULO 27

SALA DE AULA INVERTIDA: UMA ANÁLISE SOBRE A RECEPTIVIDADE DOS ESTUDANTES PARTICIPANTES DE AULAS INVERTIDAS NO PROJETO GAMA

Data de aceite: 01/03/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Gustavo Weirich Corrêa
Universidade Federal de Pelotas
Pelotas – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/4754673322745311

Cícero Nachtigall
Universidade Federal de Pelotas
Pelotas – Rio Grande do Sul

RESUMO: A Aula Invertida é um método de estudo híbrido, ou seja, que possui dois momentos – um presencial, e outro virtual – esse tipo de metodologia é estudado já há alguns anos, por diferentes professores, pesquisadores e interessados. Baseado nisso, o Projeto GAMA resolveu implementar esse processo de aprendizagem com algumas turmas do módulo de Matemática Básica, o qual já era oferecido pelo Projeto, mas da forma tradicional. Mas dessa vez, foi aplicado utilizando vídeos, feitos pelo próprio Projeto, e em seguida os alunos matriculados compareciam às aulas, que foram ministradas no Instituto Federal Sul-riograndense (IFSul) Campus Pelotas. Os resultados obtidos foram muito satisfatórios, pois mostraram que os alunos que participaram das aulas invertidas oferecidas pelo Projeto GAMA sentiram que seu nível de aprendizagem foi maior com esse método, e recomendaram que o Projeto continuasse com as aulas nesse formato.

PALAVRAS-CHAVE: Aula Invertida, Projeto GAMA, Matemática.

FLIPPED CLASSROOM: AN ANALYSIS ON RECEPTIVITY OF STUDENTS WHO PARTICIPATED ON FLIPPED CLASSROOMS IN GAMA PROJECT

ABSTRACT: The Flipped Classroom is a hybrid study method, that is, it has two different moments – one presential, and one virtual – this type of methodology has been studied over the last years, for different teachers, searchers and interested by the subject. Based on that, the GAMA Project decided to implement this learning process in some classes of the Basic Mathematics module, which was already offered by the Project, but in the traditional way. But this time, it was applied utilizing videos, made by the Project, and then the enrolled students went to the classes in Federal Institute Sul-riograndense (IFSul) campus Pelotas. The obtained results were pretty satisfactory, because showed that the students who participated in flipped classrooms offered by GAMA Project felt that the level of learning were better with this method, and recommended that the Project kept the classes in this format.

KEYWORDS: Flipped Classroom, GAMA Project, Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

O uso de tecnologias está cada vez mais comum dentro das salas de aula, tanto pelos alunos, quanto pelos professores, possibilitando mais ferramentas didáticas a ambos, como

aulas online, *softwares*, gráficos, mapas, uma infinidade de recursos que tornam o estudo mais eficiente, dinâmico e inovador. Nesse viés, criou-se o método de ensino híbrido, que consiste em unificar o estudo *online* e o *offline*, com o objetivo de maximizar o aprendizado (Bacich, Neto e Trevisani, 2015, Horn e Staker, 2015).

Um dos métodos de ensino híbrido é o de Sala de Aula Invertida, que consiste em dois momentos diferentes, um virtual e outro presencial. No primeiro momento, o aluno tem um contato inicial com a matéria, com o auxílio de videoaulas, livros didáticos, e exercícios introdutórios, indicados pelo professor. No segundo momento, o professor faz uma breve revisão do assunto, o qual já foi estudado pelo aluno, e o auxilia com exercícios, dúvidas mais específicas e um aprofundamento melhor da matéria, possibilitando uma maior interação entre os alunos e entre o aluno e o professor (Valente, 2014, Mattar, 2017).

Uma das grandes diferenças desse tipo de ensino é a possibilidade de poder qualificar o tempo do aluno e do professor no encontro presencial, como destacam BERGMANN e SAMS (2018), educadores norte-americanos considerados pioneiros e grandes divulgadores do ensino de Sala Invertida.

> [...] é, essencialmente, uma ideia muito simples. Os alunos interagem com o material introdutório em casa antes de ir para a sala de aula. Em geral, isso toma a forma de um vídeo instrutivo criado pelo professor. Esse material substitui a instrução direta, que, muitas vezes, é chamada de aula expositiva, em sala de aula. O tempo de sala de aula é, então, realocado para tarefas como projetos, inquirições, debates ou, simplesmente, trabalhos em tarefas que, no velho paradigma, teriam sido enviadas para casa. Essa simples alteração no tempo de fazer as coisas está transformando as salas de aula mundo a fora. Bergmann (2018, p.11).

Esse tipo de metodologia torna o estudo mais dinâmico, com a possibilidade do aluno assistir aulas de onde estiver e quando quiser. Entretanto sem perder o vínculo com o estudo presencial, unindo "o melhor dos dois mundos", como afirmam HORN e STAKER (2015):

> [...] o padrão dos híbridos, que combinam o antigo com o novo em busca de uma solução com "o melhor dos mundos". Os híbridos são uma forma de inovação sustentada e visam a atender ainda melhor estudantes convencionais em salas de aula tradicionais. Horn e Staker (2015, p. 83).

Pergunta norteadora: *como tem sido a receptividade dos alunos participantes de turmas de Aulas Invertidas em cursos aplicados pelo Projeto GAMA?*

Para responder essa pergunta, foi feita uma pesquisa com os alunos das primeiras turmas em que o método de Aula Invertida foi aplicado no Projeto GAMA. Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados estatísticos de tal pesquisa.

2 | METODOLOGIA

A metodologia de Aula Invertida foi aplicada em sete turmas do Módulo de Matemática Básica, totalizando aproximadamente 300 alunos matriculados. A primeira turma que a metodologia SAI foi aplicada diariamente entre os dias 13 e 20 de fevereiro (exceto nos dias 15 e 16). A segunda turma, também diariamente, nos dias 2 a 7 de março, ambas possuíam disponibilidade matutina, vespertina e noturna. Já a terceira turma foi ofertada nos dias 14, 21 e 28 de março e com disponibilidade matutina e vespertina, apenas. A experiência foi uma iniciativa do Professor, um dos autores deste trabalho, Cícero Nachtigall junto com outros professores coordenadores do Projeto GAMA.

Os principais conteúdos, trabalhados nos Módulos de Matemática Básica do Projeto, foram: Teoria básica dos conjuntos, conjuntos numéricos e intervalos, operações com frações, potenciação, radiciação, racionalização de denominadores, expressões numéricas, expressões algébricas, fatoração, produtos notáveis, operações e simplificação de frações algébricas e operações com polinômios.

O método foi desenvolvido da seguinte forma: no primeiro contato foram enviados e-mails para cada um dos integrantes das turmas, contendo links para videoaulas e arquivos em PDF feitos pelo próprio Projeto GAMA, e com um convite a participar de um grupo na rede social *WhatsApp,* com o intuito de facilitar o acesso e a comunicação entre alunos, bolsistas e professores.

Após os alunos terem estudado o conteúdo previamente, as aulas presenciais foram ministradas diariamente em seis dias, de segunda a sábado, no Instituto Federal Sul-riograndense Campus Pelotas (IFSul), onde os bolsistas do Projeto – geralmente de 4 a 5 – faziam um breve resumo aos alunos e os auxiliavam com dúvidas, orientados pelos professores. Para a primeira parte do encontro presencial (exposição do resumo e espaço para as dúvidas dos estudantes) foram destinados de dez a quinze minutos. O restante do encontro (aproximadamente uma hora e quarenta minutos) foi direcionado para que os estudantes recebessem apoio personalizado (individual ou em grupos formados espontaneamente) dos monitores e professores do GAMA.

Durante o período de aulas, os alunos foram convidados a responderem um questionário (questionário alunos) com algumas perguntas sobre a qualidade e o desenvolvimento do curso. Além disso, os bolsistas também focam convidados a responderem um questionário avaliando a experiência (questionário bolsistas). A partir das respostas desse questionário, foi feito um levantamento que desencadeou a ideia desse trabalho.

A análise dos dados obtidos em parte das respostas abertas dos questionários foi realizada utilizando a técnica de análise de conteúdo (AC).

Bardin (2016) define a análise de conteúdo como

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (BARDIN, 2016, p. 48)

Na próxima seção, serão apresentados os principais resultados desta pesquisa.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Do total de estudantes participantes das aulas invertidas do projeto GAMA, 43 retornaram o questionário respondido, sendo 28 estudantes da UFPel, 12 do IFSUL e 3 vinculados a outras instituições de ensino. Dentre os bolsistas participantes, três responderam ao questionário referente à atuação dos bolsistas. Quanto ao perfil dos participantes, constatou-se que os respondentes tinham entre 15 e 48 anos de idade, sendo que 24 (56%) tinham idade menor ou igual a 20 anos, 11 (26%) tinham entre 21 e 30 anos e 9 deles (21%) tinham mais de 31 anos de idade. Quanto ao conhecimento prévio da metodologia utilizada, 71% declararam que não possuíam qualquer conhecimento prévio a respeito da metodologia Sala de Aula Invertida e 91% declararam ter assistido pelo menos 5 das 6 aulas do curso, sendo que 20 deles (47%) declararam ter participado de todas as aulas.

Os questionários aplicados proporcionaram os dados a seguir. Um dos resultados da pesquisa foi de que o método de ensino teve uma grande aceitação entre os alunos, como mostra o Gráfico 1, o qual mais de 77% dos estudantes afirmaram que a experiência com a Aula Invertida trouxe maior aprendizado ao estudo que realizaram.
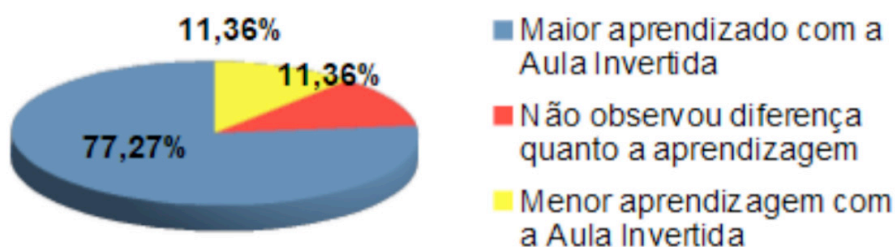
Gráfico 1

Além disso, aproximadamente 93% dos alunos recomendaram que o Projeto GAMA continuasse a oferecer aulas na metodologia de Sala de Aula Invertida para próximas turmas, como mostra o Gráfico 2.
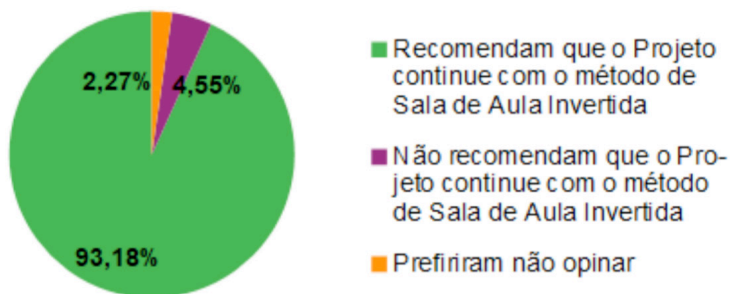
Gráfico 2

Com o objetivo de aprofundar a pesquisa, apresentamos a seguir as respostas dos participantes em relação às perguntas que indagavam sobre as vantagens e desvantagens do método utilizado. Com o objetivo de preservar o anonimato dos respondentes, os estudantes participantes foram identificados como E1, E2, ..., E43 e os bolsistas como B1, B2 e B3.

Quanto às vantagens identificadas, os estudantes destacaram aspectos como a flexibilidade de assistir onde e quando quiser. O estudante E4, por exemplo, destaca que "a principal vantagem dessa metodologia de ensino é de aluno ter mais assistência e tempo de prática com os conteúdos ministrados, além das aulas teorias ser totalmente '*on-demand*' sendo que o aluno pode optar por assistir mais de uma vez as aulas ou não assistir se estiver confortável com os conhecimentos já adquiridos." O estudante E20, complementa que "A possibilidade de ver vídeos no meu ritmo, acelerar algumas partes que já são conhecidas e ter mais tempo com os monitores para a resolução dos exercícios, o que eu acho que melhora muito o aprendizado". Da mesma forma, o estudante E19 complementa que, com a metodologia SAI o estudante "foca em trabalhar com as dificuldades que o aluno apresenta relação ao conteúdo passado, faz com que o aluno tire um tempo para estudar fora do ambiente escolar, o que é essencial, assim como também possibilita que as aulas sejam vista e revisadas se necessário em qualquer lugar e hora."

A possibilidade de maior interação entre os estudantes com os bolsistas e professores, durante os encontros presenciais, também foi destacada como positiva pelos participantes. O respondente E9, por exemplo, destaca que "A vantagem é que o aluno consegue realizar esclarecimentos de um modo maior durante a prática de exercícios, além da fixação do conteúdo ocorrer de modo mais rápido, como também da maior interação de conhecimento entre os alunos e professores." Nesta mesma perspectiva, o estudante E26 declara que "Eu acho que a aula invertida é mais vantajosa por conta de que se você não entendeu o vídeo ou acha que não fez direito em casa na aula você pode tirar todas as suas dúvidas". O estudante E27 destaca as diversas possibilidades de aprendizagem proporcionadas, ao destacar que nesta metodologia de ensino "o aluno têm tempo para ler

através do conteúdo escrito, ouvir as videoaulas e a oportunidade da sala de aula com a explicação do conteúdo em pauta e mais a questão do instrutor a total disposição para tirar as dúvidas, sendo assim, o aluno aprende pelo olhar, ouvir e ainda têm atenção exclusiva, porque cada pessoa têm seu grau de dificuldade e rapidez no aprendizado. Excelente aproveitamento."

A proposta de estudo antecipado do conteúdo, como forma de qualificar a aprendizagem, também foi destacada como positiva pelos estudantes. Isto pode ser percebido, por exemplo, no relato do estudante E12 ao pontuar que "A principal vantagem no meu ponto de vista é incentivar o aluno a ter contato com o conteúdo antes da sala de aula presencial." Nesta perspectiva, o estudante E42 destaca que "Você já chega na sala de aula sabendo o conteúdo! Então tem muito tempo pra praticar e tirar as dúvidas."

A autonomia preconizada pelo estudo antecipado, combinada com a interação com a interação nos encontros presenciais, proposta pela metodologia SAI, foi identificada como positiva por alguns participantes da pesquisa, como se pode perceber pelo relato do estudante E13 ao manifestar que "Força o estudante a ser um ser ativo nos estudos, complementando os estudos com as aulas. O estudante descobre que é capaz de realizar os estudos de maneira individual, reforçando com apoio dos colegas."

O estudante E33 destaca quatro pontos em sua resposta: "1. Cada aluno possui competências e dificuldades diferentes. Assim, na aula invertida, as questões individuais são atendidas quando surgem. 2. Ao assistir uma videoaula, o aluno pode pausá-la, retomar o vídeo, rever uma parte. Enfim, o aluno tem acesso à explicação no seu próprio tempo e ligado às suas necessidades. 3. A metodologia estimula o exercício da autonomia do aluno. 4. O aluno pode fazer até mesmo os exercícios em casa e, quando em aula, tratar apenas das suas dúvidas." Nesta mesma perspectiva, o estudante E40 destaca que "A primeira maior vantagem é a possibilidade de assistir o conteúdo e poder pausar, avançar ou voltar a explicação à vontade, já que se tratam de vídeos. Logo, se houve dúvida em algo, é possível retornar em algum ponto e possivelmente sanar a dúvida. A segunda maior vantagem é ter todo o tempo da aula presencial para a resolução de exercícios com disposição total dos monitores."

Quanto às desvantagens identificadas, a maioria dos estudantes alegaram que essa metodologia não possuía nenhuma desvantagem. Dentre as desvantagens elencadas, o depoimento do estudante E40 que destacou a possibilidade de ocorrerem imprevistos que impeçam o estudante de assistir o vídeo, previamente, alegando que "devido ao conteúdo ser dado ao longo da semana, cabe ao aluno o compromisso de assistir cada aula no dia anterior e resolver os exercícios em casa. Contudo, além do compromisso do aluno, também entra em questão a sua disponibilidade durante o dia. Se por algum motivo o aluno não tenha tempo de assistir as aulas por completo, sentirá muitas dúvidas no dia seguinte durante a resolução dos exercícios. Isso pode tomar tempo dos monitores que deverão, além de tirar dúvidas, explicar o conteúdo 'do zero' a este aluno. Porém, devo

frisar que em nenhum momento senti que não consegui ser atendida pelos monitores, muito ao contrário, sempre havia alguém para me atender.” Nesta perspectiva, o estudante E7 destaca que, na opinião dele, esta metodologia requer maior dedicação dos estudantes, como se pode observar ao declarar que “para estudantes tímidos, o estudo é similar ao estudo em casa, até mais limitado. Também vale ressaltar que os vídeos em conjunto com as aulas tornavam o envolvimento muito extenso para alunos que precisavam se dedicar a outras áreas, principalmente os calouros das universidades.”

O estudante E21 acrescenta, ainda, a dificuldade de esclarecer dúvidas que surgem ao assistir ao vídeo, ao manifestar que “estando a carga sobre o aluno, então, se ele não assistir aos vídeos o aprendizado passa para o professor em um tempo inadequado, por culpa do aluno. O vídeo pode não conter as dúvidas que determinados alunos têm.”

Outro aspecto, destacado pelos alunos como uma desvantagem, foi o acesso ao uso de tecnologias para conseguir assistir aos vídeos que foram disponibilizados para o estudo inicial. Tal aspecto pode ser exemplificado pelo relato do estudante E4 que alega “o principal ponto é que o aluno deverá ter uma estrutura digital para acompanhar as aulas online, o que pode ser incomodo para pessoas que possuem conexão de internet limitada ou de baixa velocidade.” Nesta mesma perspectiva, o estudante E19 acrescenta que a principal desvantagem, segundo ele, seria “o aluno não ter acesso à internet ou até mesmo a aparelhos eletrônicos, porém essa dificuldade já foi contornada pois a maioria das instituições de ensino apresentam salas de informática aberta aos alunos.”

Os bolsistas respondentes relataram ter identificado maior otimização do tempo nas aulas invertidas e também maior interação entre estudante e bolsista, durante os encontros presenciais. Neste sentido, o bolsista respondente B3 declara que “Na aula invertida o aluno fica no compromisso de estudar o conteúdo em casa antes de ir para a sala de aula, pois na sala o professor (monitor) irá tirar dúvidas ao invés de ministrar toda a gama de conteúdos no quadro como no modelo tradicional. Dessa forma, a interação professor-aluno fica mais fácil e mais frequente”. A principal desvantagem relatada pelos bolsistas se refere a possíveis obstáculos para o acesso prévio aos vídeos, por parte dos estudantes, o que implicaria em menos aproveitamento do encontro presencial.

4 | CONCLUSÕES

Os resultados apontam que, a partir da análise feita nesse trabalho, o Projeto GAMA obteve uma boa receptividade com os estudantes de turmas da modalidade de Sala de Aula Invertida. Visto que o uso de novas tecnologias tende a ser facilmente assimilado pelas novas gerações, por possuírem maior contato com diversos recursos tecnológicos, a Aula Invertida pode se tornar mais atrativa, uma vez que o aluno pode ter seu estudo personalizado, onde, quando e como quiser, dando liberdade e dinamismo ao estudo. Porém sem perder o encontro presencial, proporcionando não só uma maior interação

entre os alunos, mas também uma maior interação entre alunos e professores. Dificilmente haverá uma proposta metodológica que se mostre totalmente adequada a todos os estudantes. Nesta perspectiva, a aula invertida se apresenta como mais um recurso que pode ser utilizado dentre um rol de tantas outras possibilidades, em turmas de todos os níveis educacionais.

REFERÊNCIAS

BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. D. M. **(Org.) Ensino Híbrido:** Personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de Aula Invertida**: Uma metodologia Ativa de Aprendizagem. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

BERGMANN, J. **Aprendizagem invertida para resolver o problema da lição de casa**. Porto Alegre: Penso, 2018.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended:** usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

MATTAR, J. **Metodologias Ativas para educação presencial, blended e a distância**. São Paulo: Artesanato Educacional, 2017.

MAZUR, E. **Peer Instruction:** A Revolução da Aprendizagem Ativa. Porto Alegre: Penso, 2015.

MORAN, J. M. Educação Híbrida: um conceito chave para a educação, hoje. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. D. M. **Ensino Híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. **Educar em Revista**, n. 4, p. 79-97, 2014.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ANDRÉ RICARDO LUCA VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB/MPEJA (2018), com Especialização em Tópicos Especiais de Matemática (2020), Ensino de Matemática (2018), Educação de Jovens e Adultos (2016), Matemática Financeira e Estatística (2015) e Gestão Escolar (2008). Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho (2000). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica - PARFOR pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus XVI - Irecê-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação - FOPTIC (UFS/CNPq). É editor assistente da Revista Baiana de Educação Matemática - RBEM, uma publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus III - Juazeiro/BA em parceria com o Campus VII - Senhor do Bonfim/BA da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão-PE, Campus Santa Maria da Boa Vista/PE.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

M

N

O

P

R

S

T

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 3

Ano 2021